VISIT…

Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

ДВИЖЕНИЕ ПРИРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редакторы: *Г. А. Вольперт* и *А. З. Рывкин*. Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*.
Подписано к печати 7/VI 1947 г. 15,25 печ. *л.* 13,75 уч.-изд. *л.* 13,15 авт. *л.* 37 000 тип. зн. в печ. *л.* А01483. Тираж 5000 экз. Цена книги 8 р. Заказ № 7018.

1-я Образцовая тип. треста Полиграфкнига" ОГИЗа при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

ПОСВЯЩАЕТСЯ
ПАМЯТИ МОЕГО УЧИТЕЛЯ
ПРОФЕССОРА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
НИКОЛАЯ ЕГОРОВИЧА
ЖУКОВСКОГО

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Глава I. **Теория фильтрации** 11

§ 1. Фильтрация. Грунты идеальный и фиктивный 11
§ 2. Фильтрация в идеальном грунте 11
§ 3. Пористость фиктивного грунта 18
§ 4. Геометрическое рассмотрение установившегося движения жидкости через фиктивный грунт по Слихтеру 24
§ 5. Фильтрация через фиктивный грунт по Слихтеру . 31
§ 6. Фильтрация через фиктивный грунт по Козени . . 35
§ 7. Фильтрация через фиктивный грунт по Терцаги . . 38
§ 8. Приложение метода обтекания к теории фильтрации в фиктивном грунте 41
§ 9. Приложение метода размерностей к теории фильтрации жидкостей 44
§ 10. Видоизменение основной формулы теории фильтрации 47
§ 11. Переход от фиктивного грунта к естественному . . 48
§ 12. Основная формула Дарси 55
§ 13. Старые формулы для коэффициента фильтрации Дарси 56
§ 14. Определение коэффициента фильтрации по величине проницаемости 59
§ 15. Влияние существования жидкой плёнки около частиц грунта на пористость и проницаемость 61
§ 16. Образование областей застойной жидкости около шарообразных частиц грунта 63
§ 17. Формулы, не основанные на законе Дарси 65
§ 18. Формула Шривера 67
§ 19. Фильтрация через глину 68
§ 20. Турбулентная фильтрация 69

Глава II. **Уравнения ламинарного движения жидкостей и газов в пористой среде** 74

§ 1. Уравнение неразрывности при движении сжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде 74
§ 2. Компоненты скорости ламинарной фильтрации 75
§ 3. Фиктивные силы сопротивления 76
§ 4. Основное уравнение ламинарной фильтрации сжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде . . . 77

§ 5. Уравнения движения тяжёлой несжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде 79
§ 6. Уравнения движения газа в неизменяемой пористой среде 81
§ 7. Уравнения движения малосжимаемой тяжёлой жидкости в неизменяемой пористой среде 83
§ 8. Уравнение неразрывности при движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде 84

Глава III. **Уравнения турбулентного движения жидкостей и газов в пористой среде** 87

§ 1. Компоненты скорости турбулентной фильтрации . . . 87
§ 2. Введение фиктивных сил сопротивления 89
§ 3. Основное уравнение турбулентной фильтрации сжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде 90
§ 4. Турбулентное движение несжимаемой жидкости . . . 91
§ 5. Турбулентное движение газа в пористой среде при политропном процессе 92
§ 6. Турбулентное движение малосжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде 93

Глава IV. **Уравнения движения газированной жидкости в неизменяемой пористой среде** 94

§ 1. Основные определения 94
§ 2. Совместное движение жидкости и газа в пористой среде (с одинаковыми скоростями) 95
§ 3. Определение насыщенности подвижного элемента . . 98
§ 4. Уравнения ламинарного совместного движения жидкости и газа в неизменяемой пористой среде 99
§ 5. Частный случай установившегося совместного движения жидкости и газа 103
§ 6. Уравнения ламинарного движения газированной жидкости в неизменяемой пористой среде при различных скоростях жидкой и газовой фаз 103
§ 7. Случай, когда насыщенность есть функция только давления 108
§ 8. Частный случай, когда скорости жидкой и газовой фаз одинаковы 110
§ 9. Функциональная зависимость проницаемости жидкости и газа в пористой среде от насыщенности 111

Глава V. **Экспериментальные исследования движения газированной жидкости в неизменяемой пористой среде** 115

§ 1. Опыты В. Клауда 115
§ 2. Сравнение с опытами Л. Юрена 122
§ 3. Сравнение теории с опытами Л. Рейда и Р. Хентингтона 124

§ 4. Опыты Юрена над неустановившимся движением газированной нефти 126
§ 5. Газовое число 131

Глава VI. **Установившееся движение газа в неизменяемой пористой среде** 132

§ 1. Уравнения установившегося движения газа в неизменяемой пористой среде 132
§ 2. Одномерное течение газа 133
§ 3. Сравнение с опытами ГИНИ 134
§ 4. Сравнение с опытами МГУ 137

Глава VII. **Неустановившееся ламинарное движение газа в неизменяемой пористой среде** 142

§ 1. Основное уравнение 142
§ 2. Первое частное решение 143
§ 3. Второе частное решение 145
§ 4. Приближённое интегрирование основного уравнения (3.1) для одномерного движения 147
§ 5. Приближённое интегрирование уравнения одномерного движения при постоянном начальном давлении по всей длине пласта 150
§ 6. Второе приближение 152
§ 7. Исследование функции $\varphi(x, q)$ 154
§ 8. Дебит пласта 155
§ 9. Неустановившееся движение газа в двух измерениях 161
§ 10. Случай, когда скважина с круговым контуром находится в центре круговой внешней границы 162
§ 11. Вычисление дебита скважины 165
§ 12. Форма интеграла уравнения (9.4) вблизи скважины малого диаметра 168

Глава VIII. **Экспериментальные исследования неустановившегося движения газа в песке** 170

§ 1. Опыты ГИНИ в 1928 г. 170
§ 2. Опыты ГИНИ в 1931 и 1932 гг. 184
§ 3. Опыты в МГУ над неустановившимся движением газа 195
§ 4. Опыты ГИНИ 1930 и 1931 гг. 198
§ 5. Закон прямой линии Д. С. Вилькера 202
§ 6. Новые опыты в МГУ над движением воздуха через пористую среду 202

Глава IX. **Гидравлический режим** 206

§ 1. Постановка проблемы 206
§ 2. Одномерная проблема о вытеснении мёртвой нефти водой 207
§ 3. Общая постановка проблемы о вытеснении краевой водой мёртвой нефти из пласта небольшой толщины 210

§ 4. Вытеснение краевой водой мёртвой нефти из круглой линзы постоянной толщины 212
§ 5. Общий случай вытеснения краевой водой нефти из линзы некругового очертания (приближённое аналитическое решение) 215
§ 6. Приближённое графическое решение задачи, поставленной в § 5 218
§ 7. Вытеснение газа краевой водой 220

Глава X. **Гравитационный режим течения жидкостей в пористой среде** 225

§ 1. Уравнение Буссинеска для неглубокой воды 225
§ 2. Уравнение Дюпюи 229
§ 3. Аналогия с движением газа 230
§ 4. Уравнения Буссинеска для глубокой воды 230
§ 5. Плоская задача установившегося движения в неглубокой воде 233
§ 6. Установившееся радиальное движение в неглубокой воде 234
§ 7. Упорядоченный режим Буссинеска 236

Именной указатель 241

Предметный указатель 242

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет результат многолетних исследований автора о движении природных жидкостей и газов в пористой среде.

Первое исследование, посвящённое движению воды в пористой среде, принадлежит известному французскому инженеру Дарси и появилось в середине XIX столетия. Метод Дарси был затем применён к решению разнообразных гидротехнических задач. Другое крупное исследование по теории фильтрации принадлежит американскому инженеру Слихтеру и появилось в конце XIX столетия.

Мощное развитие нефтяной и газовой промышленности в 20-х годах текущего столетия привлекло наше внимание к ещё более сложным вопросам движения природных газов и нефтей в пористой среде. Эти вопросы имеют первостепенное значение для рационализации разработки и эксплоатации нефтяных и газовых месторождений. В последнее время теория движения газов в пористой среде нашла применение в каменноугольной промышленности — в вопросах о газообильности шахт и в вопросах подземной газификации. Теория движения газов в пористой среде должна получить значение и при геофизических исследованиях, связанных с вопросом о движении ювенильного газа из подкорового пространства и центрального ядра земли.

В первой главе книги мы даём краткий очерк о методах исследования движения несжимаемой жидкости через пористую среду, предложенных различными авторами. При этом мы широко используем понятие проницаемости пористой среды, введённое американскими авторами. Это важное понятие позволяет составить общие уравнения движения жидкостей и газов в пористой среде.

В следующих главах мы излагаем созданные нами теорию ламинарного и турбулентного движения газа в пористой среде,

теорию движения газированной жидкости в пористой среде и основы нашей теории гидравлического режима. При этом мы приводим результаты замечательных опытных исследований над движением воздуха в песке, произведённых нашим учеником Д. С. Вилькером в Гидродинамической лаборатории имени Н. Е. Жуковского Московского Государственного Университета. Опыты Д. С. Вилькера подтверждают предложенную нами теорию движения газа в пористой среде, для которой известны проницаемость и пористость. Мы приводим также результаты известных нам опытных исследований некоторых американских авторов над движением газированной жидкости. Сравнение наших теоретических выводов с этими опытами также подтверждает нашу теорию.

Наши исследования послужили основой для ряда работ Д. С. Вилькера, П. Я. Кочиной, Б. Б. Лапука, М. Д. Миллионщикова, И. П. Москалькова, И. А. Чарного, В. Н. Щелкачёва и других. В результате был создан новый отдел прикладной гидромеханики, посвящённый теории движения газа и газированной жидкости в пористой среде и её техническим приложениям.

Необходимо также указать на выдающиеся работы русских учёных Н. Е. Жуковского и Н. Н. Павловского по вопросам фильтрации подземных вод.

Автор выражает свою благодарность проф. В. Н. Щелкачёву за ценную помощь по общему редактированию настоящей книги.

Санаторий «Узкое»,
июль 1946.

Акад. *Л. С. Лейбензон.*

ГЛАВА I.

ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ.

§ 1. Фильтрация. Грунты идеальный и фиктивный.

При движении природных жидкостей (вода, нефть, газ) стественном грунте частицы жидкости перемещаются через ы грунта, т. е. через мельчайшие каналы, образовав-ся между частицами грунта вследствие их неплотного легания друг к другу. Такое движение жидкостей в нте называется *фильтрацией*. Вследствие чрезвычайно ого поперечного сечения пор и малых скоростей движе- в них вязкость жидкости должна играть при таком дви-ии значительную роль. Обычно движение в порах считают инарным, но вследствие значительного искривления стенок алов и значительных изменений их поперечного сечения людается и турбулентное движение. Ввиду того что тицы грунта имеют неправильную форму и самые разно-азные размеры, невозможно искать решение уравнений жения вязкой жидкости в такой среде. Поэтому с самого ала пришлось пойти по пути построения упрощённых мо-ей грунта.

Так как легче всего исследовать движение вязкой жидко- в каналах цилиндрической формы, то при гидродина-еском исследовании фильтрации принимают все поры индрическими и предполагают, что оси цилиндров парал-ьны между собой. Такой грунт называют *идеальным*. :дующей ступенью является грунт, построенный из одина-ых шарообразных частиц; его называют *фиктивным* грунтом.

§ 2. Фильтрация в идеальном грунте.

Пусть мы имеем некоторый объём V_1 естественного нта. Пусть все имеющиеся в нём частицы грунта зани-от некоторый объём V_2. Сумма объёмов каналов (пор),

заключённых в этом объёме, будет равна

$$V_3 = V_1 - V_2;$$

это есть та часть объёма грунта, которая может быть заполнена жидкостью. Отношение суммы объёмов пор ко всему объёму грунта, т. е.

$$m = \frac{V_3}{V_1}, \tag{2.1}$$

называется *пористостью*. Очевидно,

$$0 < m < 1.$$

Выделим объём пласта идеального грунта, толщину которого в направлении фильтрации обозначим через h, а площадь поперечного сечения — через F. Предположим, что в этом пласте имеется N_1 одинаковых поровых трубок, т. е. цилиндрических каналов с длиной h и площадью поперечного сечения ω. Тогда на единицу площади поперечного сечения грунта приходится

$$N_2 = \frac{N_1}{F}$$

таких поровых трубок. Выделенный объём идеального грунта имеет величину

$$V_1 = hF,$$

а сумма объёмов пор, в нём содержащихся, равна

$$V_3 = N_1 h\omega.$$

Следовательно, согласно формуле (2.1), пористость идеального грунта равна

$$m = N_2\omega. \tag{2.2}$$

Если w_0 есть средняя скорость течения по одной из поровых трубок, то расход жидкости через неё будет

$$q = \omega w_0,$$

а так как на единицу площади поперечного сечения идеального грунта приходится N_2 поровых трубок, то соответствующий расход жидкости (расход на единицу площади поперечного сечения грунта), называемый *скоростью фильтрации*

идкости через грунт, будет равен

$$w = N_2 q = N_2 \omega w_0.$$

а основании формулы (2.2) получаем отсюда соотношение

$$w = m w_0, \tag{2.3}$$

станавливающее связь между фиктивной скоростью w фильрации через идеальный грунт и действительной скоростью ечения жидкости w_0 по поровым трубкам, из которых построен идеальный грунт.

Легко получить приближённую формулу для действительой скорости w_0. Пусть P есть падение гидродинамического авления на длине h поровой трубки. Обозначим через χ ериметр поперечного сечения поровой трубки и через τ — нтенсивность силы трения жидкости о стенки этой трубки. ри равномерном движении жидкости по поровой трубке вижущая сила $P\omega$ уравновешивает силу сопротивления $h\chi\tau$, ледовательно, мы имеем соотношение

$$P\omega = h\chi\tau. \tag{2.4}$$

учении о движении жидкостей по трубам [1]) выводится слеующая формула для τ:

$$\tau = \frac{1}{8}\lambda\rho w_0^2, \tag{2.5}$$

де ρ есть плотность жидкости, а λ — коэффициент сопроивления, представляющий собой безразмерную величину. нося (2.5) в (2.4), получаем

$$\frac{P}{h}\delta = \frac{1}{8}\lambda\rho w_0^2, \tag{2.6}$$

де $\frac{P}{h}$ есть падение давления на единицу длины, а δ — гидавлический радиус поперечного сечения поровой трубки, пределяемый соотношением

$$\delta = \frac{\omega}{\chi}. \tag{2.7}$$

римем для коэффициента сопротивления λ степенную форулу Рейнольдса

$$\lambda = a\mathrm{R}_1^{-l}, \tag{2.8}$$

[1]) См., например, Лейбензон Л. С., Руководство по нефтеромысловой механике, часть 1.

где α есть некоторое число, зависящее от значения i, i — показатель, зависящий от режима течения жидкости, а R_1 — число Рейнольдса, определяемое по формуле

$$R_1 = \frac{w_0 \delta}{\nu} = \frac{w_0 \delta \rho}{\mu}, \tag{2.9}$$

где ν есть кинематическая вязкость, связанная с абсолютной вязкостью μ соотношением

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{2.10}$$

Внося (2.8) и (2.9) в (2.6) и обозначая

$$s = \frac{1}{2-i}, \tag{2.11}$$

мы получим

$$w_0 = \left(\frac{8}{\alpha}\right)^s \frac{\mu^{1-2s} \delta^{3s-1}}{\rho^{1-s}} \left(\frac{P}{h}\right)^s. \tag{2.12}$$

Эту формулу можно представить в виде

$$\frac{w_0 \delta \rho}{\mu} = \left(\frac{8}{\alpha}\right)^s \left(\frac{P \rho \delta^3}{h \mu^2}\right)^s \tag{2.13}$$

или

$$R_1 = \left(\frac{8}{\alpha}\right)^s \Omega_1^s, \tag{2.14}$$

где введена новая безразмерная величина

$$\Omega_1 = \frac{\rho \delta^3}{\mu^2} \cdot \frac{P}{h}. \tag{2.15}$$

Из (2.14) имеем

$$\Omega_1 = \frac{\alpha}{8} R_1^{\frac{1}{s}}. \tag{2.16}$$

следовательно, безразмерная величина Ω_1 есть степенная функция числа Рейнольдса. Это есть частный случай общего закона Осборна Рейнольдса (O. Reynolds) при движении жидкости по призматической трубе произвольного поперечного сечения; этот закон выражается в виде уравнения

$$\Omega_1 = F(R_1). \tag{2.17}$$

В случае ламинарной фильтрации движение жидкости по поровым трубкам идеального грунта есть ламинарное, при котором

$$s = 1.$$

Тогда из (2.12) мы получаем для скорости в поровой трубке выражение

$$w_0 = \frac{8}{\alpha} \cdot \frac{P\delta^2}{h\mu},$$

которое после введения обозначений

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{8}}, \tag{2.18}$$

$$k_0 = \frac{\delta^2}{\beta^2} \tag{2.19}$$

можно представить в виде

$$w_0 = \frac{k_0}{\mu} \frac{P}{h}. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в (2.3), находим скорость фильтрации в идеальном грунте

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{P}{h}, \tag{2.21}$$

где

$$k = mk_0 = \frac{m\delta^2}{\beta^2}. \tag{2.22}$$

Величина k, имеющая размерность площади, получила у геологов США название *проницаемости*.

Из (2.22) находим гидравлический радиус идеального грунта

$$\delta = \beta \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.23}$$

В гидродинамике доказывается [1]), что при равномерном ламинарном движении по призматической трубе средняя скорость в случае круглого поперечного сечения равна

$$w_0 = \frac{P\omega}{8\pi\mu h}, \tag{2.24}$$

---

[1]) См., например, Лейбензон Л., Руководство по нефтепромысловой механике, часть I, глава I, формулы (3.12) и (7.6).

а в случае поперечного сечения в виде равностороннего треугольника

$$w_0 = \frac{P\omega}{20\sqrt{3}\mu h}. \tag{2.25}$$

Для круглого сечения диаметра d имеем

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \chi = \pi d.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{d}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4\omega}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}. \tag{2.26}$$

Сравнивая (2.19) и (2.26), имеем

$$k_0 = \frac{\delta^2}{\beta^2} = \frac{\omega}{4\pi\beta^2} = \frac{\omega}{8\pi},$$

откуда находим, что

$$\beta^2 = 2. \tag{2.27}$$

Если поперечное сечение есть равносторонний треугольник со стороной a, то имеем

$$\omega = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \quad \chi = 3a,$$

следовательно,

$$\delta = \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\omega}}{2 \cdot 3^{0{,}75}}. \tag{2.28}$$

Сравнивая (2.19) с (2.28), получаем

$$k_0 = \frac{\delta^2}{\beta^2} = \frac{\omega}{4 \cdot 3^{1{,}5} \cdot \beta^2} = \frac{\omega}{20\sqrt{3}},$$

откуда находим, что

$$\beta^2 = \frac{5}{3}. \tag{2.29}$$

Легко найти, что для случая квадратного сечения

$$\beta^2 = \frac{16}{9}. \tag{2.30}$$

Таким образом, величина β^2 мало изменяется с формой поперечного сечения. Поэтому в формуле (2.23) мы можем считать, что при ламинарном движении β постоянно и близко к среднему значению

$$\beta = 1{,}87. \tag{2.31}$$

Также сравнительно мало меняется с формой поперечного сечения величина пористости m. Но величина k, как показывают опыты и теоретические выводы Слихтера (Slichter), Козени (Kozeny) и других, меняется в широких пределах. Следовательно, формулу (2.23) можно приближённо представить в виде

$$\delta = \zeta \sqrt{k}, \tag{2.32}$$

где ζ есть величина, зависящая только от пористости, ибо при ламинарном движении $\beta \approx \text{const}$.

Из формулы (2.12) следует, что при $s = \frac{1}{2}$ скорость течения в поровой трубке не зависит от вязкости жидкости. В этом случае, получившем название *чисто квадратичной фильтрации*, имеем

$$w = \frac{k_1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{P}{h}}, \tag{2.33}$$

где

$$k_1 = \frac{m}{\beta} \sqrt{\delta}\ ^{1}) \tag{2.34}$$

Из формулы (2.23) следует, что гидравлический радиус δ пропорционален корню квадратному из проницаемости; следовательно, величина k_1 пропорциональна корню четвёртой степени из проницаемости, т. е. k_1 имеет размерность корня четвёртой степени из площади.

Случай, когда $s = \frac{2}{3}$, называется *законом фильтрации Смрекера* (Smrecer). В этом случае имеем из (2.3) и (2.12) выражение для скорости фильтрации

$$w = \frac{k_2}{\sqrt[3]{\mu\rho}} \left(\frac{P}{h}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{2.35}$$

где введена величина

$$k_2 = \frac{m\delta}{\sqrt[3]{\beta^4}}, \tag{2.36}$$

характеризующая фильтрацию Смрекера [2]).

---

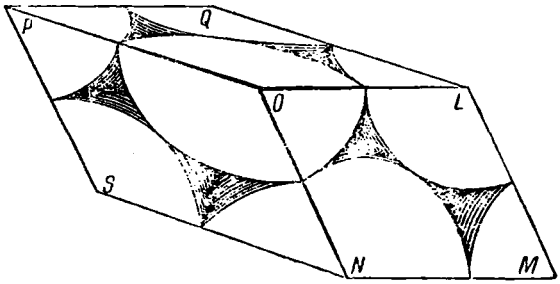
[1]) Величина β, согласно формуле (2.18), зависит от α; значение же α, в свою очередь, зависит от i, т. е. от s. Следовательно, величина β в формуле (2.34), т. е. в случае квадратичной фильтрации, имеет другое значение, чем в случае ламинарной фильтрации.

[2]) В формуле (2.36) величина β имеет иное значение, чем в формулах (2.23) и (2.34) — см. предыдущее подстрочное примечание.

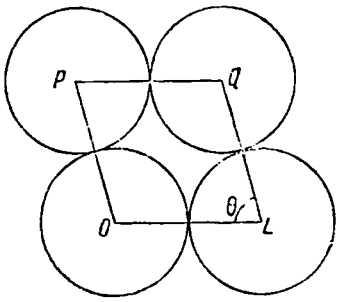
Из формул (2.23) и (2.36) следует, что величина k_2 пропорциональна корню квадратному из проницаемости, т. е. k_2 имеет размерность корня квадратного из площади.

§ 3. Пористость фиктивного грунта.

Слихтер путём простых геометрических соображений определил пористость фиктивного грунта. Очевидно, величина

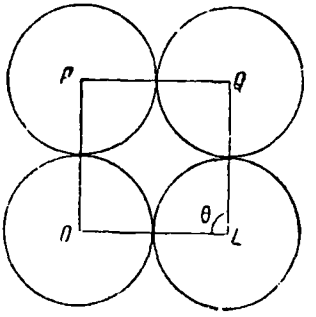


пористости зависит от конфигурации шаров. Так как все шары одинакового диаметра, то расстояние между центрами любых двух соприкасающихся шаров равно сумме их радиусов, т. е. диаметру. Следовательно, центры каждых восьми соприкасающихся шаров расположены в вершинах ромбоэдра, каждая грань которого есть ромб (фиг. 1). Этот ромбоэдр является основной моделью для фиктивного грунта в методе Слихтера. Изучение геометрических свойств этой конфигурации и даёт возможность вычислить величину пористости m. Различные расположения шаров фиктивного грунта колеблются между двумя крайними конфигурациями, из которых одна соответствует теснейшему расположению шаров, а другая — их

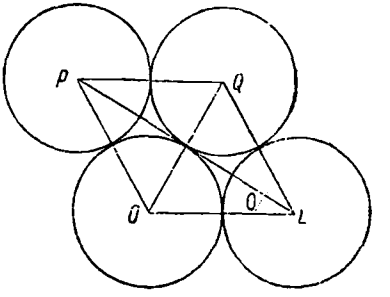


Фиг. 2.

наиболее свободному расположению (при условии взаимного соприкосновения). Очевидно, угол θ ромба (фиг. 2), из которого образованы грани ромбоэдра, изменяется в пределах от $\theta = 90°$



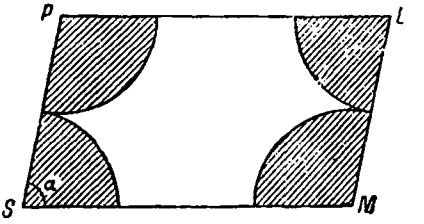
Фиг. 3.



Фиг. 4.

(фиг. 3) до $\theta = 60°$ (фиг. 4). Так как в ромбоэдре для каждого угла грани имеется угол, дополнительный до 180°, то, очевидно, те восемь кусков шаров, которые грани ромбоэдра вырезают из восьми рассматриваемых шаров, образуют, если их сложить, один целый шар.

На фиг. 5 и 6 даны диагональные разрезы $SPLM$ и $NOQR$ основного ромбоэдра. Определим угол α одного из полученных параллелограмов, например первого (фиг. 5). Для этого опишем из вершины ромбоэдра O шар радиуса d (фиг. 7). Диагональное сечение вместе с гранями OAD и OAB пересекает поверхность шара по дугам, образующим прямоугольный сферический треугольник ABC с прямым углом BCA. Перпендикуляр BE из вершины B на диагональ OC будет высотой h ромбоэдра. Из указанного прямоугольного сферического треугольника имеем



Фиг. 5.

$$\cos AB = \cos BC \cdot \cos AC.$$

Но мы имеем

$$\smile AB = \theta, \quad \smile AC = \frac{\theta}{2}, \quad \smile BC = \alpha,$$

следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{3.1}$$

Из (3.1) получаем

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\theta - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}.$$

Но так как

$$4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2(1+\cos\theta) - 1 = 1 + 2\cos\theta,$$

то находим

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sqrt{1+2\cos\theta}.$$

Отсюда окончательно имеем

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\sqrt{1+2\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\sqrt{1+2\cos\theta}. \tag{3.2}$$

Далее, из прямоугольного треугольника BEO находим

$$h = d\sin\alpha. \tag{3.3}$$

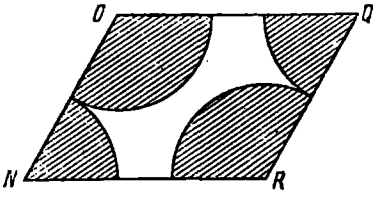
Так как площадь основания ромбоэдра равна $d^2 \sin\theta$, то объём ромбоэдра имеет величину

$$V_1 = hd^2 \sin\theta.$$

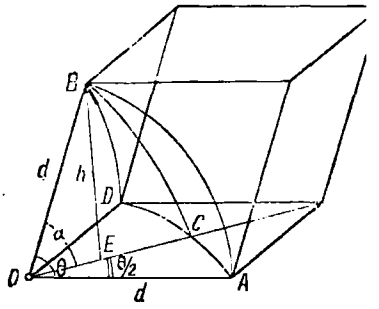
Внося сюда h из (3.3) и $\sin\alpha$ из (3.2), имеем

$$V_1 = \frac{d^3 \sin^2\theta \sqrt{1+2\cos\theta}}{1+\cos\theta}. \tag{3.4}$$

Сумма V_2 объёмов всех восьми кусков шаров, помещающихся



Фиг. 6.



Фиг. 7.

внутри рассматриваемого ромбоэдра, как уже было указано, образует один целый шар, следовательно,

$$V_2 = \frac{\pi d^3}{6}. \tag{3.5}$$

Внося (3.4) и (3.5) в (2.1), мы находим

$$m = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{\frac{\pi d^3}{6}(1+\cos\theta)}{d^3 \sin^2\theta \sqrt{1+2\cos\theta}}.$$

Подставляя сюда

$$\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta),$$

мы получим фундаментальную формулу Слихтера

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}}, \tag{3.6}$$

из которой следует, что *пористость фиктивного грунта, состоящего из одинаковых шарообразных частиц, не зависит от их диаметра; она зависит только от их относительной конфигурации, обусловливаемой величиной угла* θ.

Крайние значения угла θ равны 60° и 90°, следовательно, крайние значения пористости m по формуле (3.6) будут равны соответственно

$$m = 0{,}259; \quad m = 0{,}476.$$

Так как $\frac{dm}{d\theta} > 0$, то интервалом *теоретической пористости* будет

$$0{,}259 \leqslant m \leqslant 0{,}476. \tag{а}$$

Рассматривая фиг. 2, мы видим, что площадь прохода между шарами в плоскости, содержащей их центры, будет иметь величину S, равную

$$S = S_1 - S_2,$$

где S_1 есть площадь ромба, S_2 — площади частей кругов, лежащих внутри ромба. Легко видеть, что все четыре части кругов, лежащих внутри ромба, составляют один круг с площадью

$$S_2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Площадь же ромба S_1 равна

$$S_1 = d^2 \sin\theta.$$

Следовательно,

$$S = \left(\sin\theta - \frac{\pi}{4}\right) d^2. \tag{3.7}$$

Введём теперь, следуя Слихтеру, отношение

$$n = \frac{S}{S_1} = 1 - \frac{S_2}{S_1} \tag{3.8}$$

и назовём его *просветом*. Величина n характеризует площадь

прохода жидкости в самом узком месте порового канала. Внося найденные значения S_1 и S_2 в (3.8), мы получим

$$n = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \theta}. \tag{3.9}$$

Отсюда мы видим, что *для фиктивного грунта величина*

Таблица 1. **Значения теоретической пористости m и теоретического просвета n в интервале угла θ от 60° до 86°.**

θ	m	n	σ	σ_1	σ_2
60° 00′	0,259	0,0931	88,90	62,00	42,10
60° 02′	0,26	0,0937	84,30	38,75	25,00
60° 41′	0,27	0,0993	74,05	34,25	21,84
61° 18′	0,28	0,1045	65,94	29,50	17,76
61° 55′	0,29	0,1098	58,90	26,00	16,60
62° 36′	0,30	0,1155	52,47	22,63	14,42
63° 18′	0,31	0,1210	47,12	20,00	12,54
64° 03′	0,32	0,1266	42,44	17,60	11,00
64° 49′	0,33	0,1322	38,44	15,82	9,64
65° 37′	0,34	0,1378	34,75	13,95	8,58
66° 27′	0,35	0,1434	31,62	12,18	7,50
67° 21′	0,36	0,1491	28,79	11,04	6,58
68° 18′	0,37	0,1549	26,26	10,00	5,83
69° 17′	0,38	0,1605	24,08	8,80	5,22
70° 20′	0,39	0,1661	22,11	7,87	4,60
71° 28′	0,40	0,1719	20,32	7,08	4,06
72° 43′	0,41	0,1775	18,73	6,32	3,62
74° 03′	0,42	0,1832	17,28	5,71	3,24
75° 32′	0,43	0,1902	15,96	5,14	2,89
77° 10′	0,44	0,1945	14,76	4,65	2,55
79° 06′	0,45	0,2003	13,71	4,15	2,28
81° 25′	0,46	0,2057	12,76	3,75	2,05
84° 59′	0,47	0,2117	11,83	3,40	1,84
90° 00′	0,476	0,2146	11,38	3,20	1,71

Примечание. Величины σ, σ_1, σ_2 даны для удобства последующих вычислений по формулам (5.13), (6.13), (6.14) и связаны с m и n соотношениями

$$\sigma = \frac{1-m}{n^2}, \quad \sigma_1 = \frac{5}{4}\frac{(1-m)^2}{m^3}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{1-m}{m}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-n}.$$

просвета не зависит от диаметра шарообразных частиц, образующих грунт.

Соответственно крайним значениям угла θ имеем следующие крайние значения n:

$$n = 0{,}0931; \quad n = 0{,}2146.$$

Так как $\frac{dn}{d\theta} > 0$, то интервалом *теоретического просвета* будет

$$0{,}0931 \leqslant n \leqslant 0{,}2146. \tag{b}$$

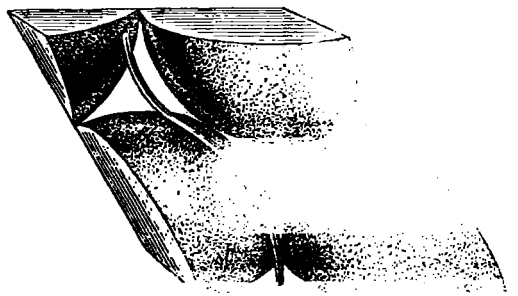
Таблица 1, составленная Слихтером, даёт значения m и n для каждого значения угла θ по формулам (3.6) и (3.9). Из неё мы видим, что каждому значению m соответствует определённое значение n. Функционально эта связь между n и m в интервале (а) приближённо может быть выражена формулой

$$n = C_2 m^{1,4}, \tag{3.10}$$

где C_2 есть постоянная величина.

§ 4. Геометрическое рассмотрение установившегося движения жидкости через фиктивный грунт по Слихтеру.

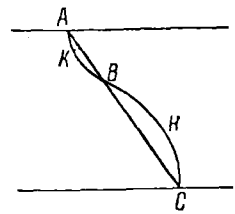
Так как элементарные струйки жидкости движутся между шарообразными частицами фиктивного грунта, огибая их,



Фиг. 8.

то траектория отдельной частицы жидкости не будет прямой линией, перпендикулярной к верхнему и нижнему основаниям

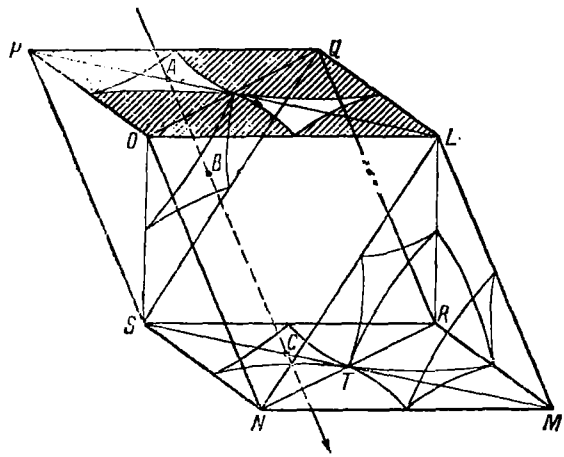
пласта из фиктивного грунта. В действительности такая траектория, совпадающая в данном случае с линией тока, будет некоторой искривлённой в пространстве линией. Из совокупности этих линий тока составляется элементарная струйка (фиг. 8), протекающая через рассматриваемую пору. Осью этой струйки будет служить кривая *AKBHC* (фиг. 9).



Фиг. 9.

В случае теснейшего расположения шаров ($\theta = 60°$) представление о характере порового канала можно получить из фиг. 8, 9 и 10. Этот частный случай строения струйки и был исследован Слихтером.

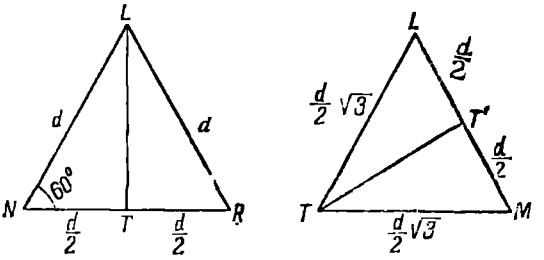
Наименьшие поперечные сечения порового канала являются криволинейными треугольниками (фиг. 10), стороны которых составлены из дуг большого круга шаров. Площадь сечения порового канала в его наиболее узком месте равна nS_1, где n есть



Фиг. 10.

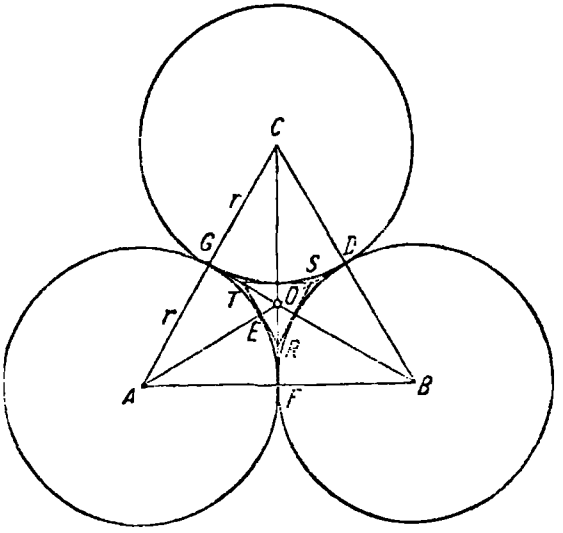
просвет, а S_1 — площадь грани ромбоэдра. Начиная с этого места (точка A струйки) сечение струйки понемногу увеличивается до максимума в точке K (фиг. 9), а затем снова падает до своей первоначальной величины

в точке B. Далее происходит увеличение сечения порового канала до максимума в точке H, после чего сечение снова уменьшается и получает первоначальную величину в точке C.



Фиг. 11.

Легко вычислить угол между плоскостью верхнего основания ромбоэдра и плоскостью OSQ (фиг. 10); в этих двух



Фиг. 12.

плоскостях лежат соответствующие точкам A и B фигуры 9 минимальные сечения изучаемого порового канала. Из фиг. 10 видно, что упомянутый угол равен углу наклона плоскости

NLR к нижнему основанию ромбоэдра. Вычислим этот последний угол. Рассмотрим треугольники LNR и LTM, которые, для ясности, изображены отдельно на фиг. 11. В треугольнике LNR имеем

$$NL = LR = NR = d.$$

В треугольнике LTM имеем

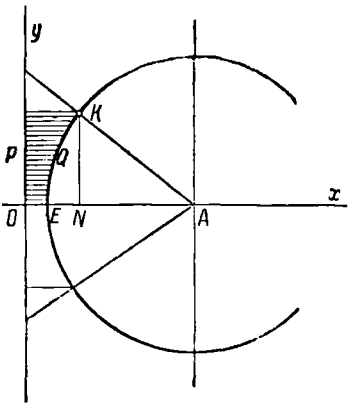
$$LT = TM = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\sin\left(\frac{1}{2}LTM\right) = \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда искомый угол равен

$$\angle LTM = 70{,}6°.$$



Фиг. 13.

Таким образом, поровый канал расширяется от своего минимального сечения к максимальному при проходе углового расстояния приблизительно в 35° на поверхности шаровой частицы. Если сделать разрез по линии AD на фиг. 12, то получится фиг. 13, на которой окружность есть сечение шаровой частицы по дуге большого круга. Из фиг. 12 имеем

$$AB = AC = CB = d = 2r;$$
$$AD = r\sqrt{3};$$

из фиг. 13 имеем

$$AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}r\sqrt{3};$$
$$EO = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right).$$

Площадь A_r равностороннего треугольника RST на фиг. 12 равна

$$A_r = 3\sqrt{3}\cdot\overline{OE}^2. \qquad (4.1)$$

Если вместо $\triangle RST$ взять другой треугольник, для которого радиус вписанного круга равен не OE, а PQ (см. фиг. 12 и 13), то площадь A_q такого треугольника будет равна

$$A_q = 3\sqrt{3} \cdot \overline{PQ}^2. \tag{4.1'}$$

Уравнение окружности EK на фиг. 13, радиус которой равен r, при принятых на чертеже осях координат имеет вид

$$(x - \overline{OA})^2 + y^2 = r^2,$$

откуда

$$x - \overline{OA} = \pm\sqrt{r^2 - y^2}.$$

В соответствии с чертежом следует взять в правой части знак минус; поэтому имеем

$$x = OA - \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{2}{3} r\sqrt{3} - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Слихтер принимает последовательные сечения рассматриваемого порового канала за криволинейные треугольники, для которых радиус упомянутого вписанного круга есть

$$PQ = x.$$

Отсюда имеем

$$PQ = \frac{2}{3} r\sqrt{3} - \sqrt{r^2 - y^2}. \tag{4.2}$$

Подставляя это значение в формулу (4.1'), получим величину площади A_q сечения.

Среднее по длине струйки значение A_q обозначим через A_m. Оно вычисляется по известной формуле

$$A_m = \frac{1}{b - a} \int_a^b A_q dy. \tag{4.3}$$

В нашем случае $a = 0$, а величина b, т. е. NK (см. фиг. 13), равна приблизительно половине радиуса r. В самом деле, на

фиг. 13 угол OAK равен приблизительно 35°, откуда и следует, что

$$b = r \sin 35^\circ \approx \frac{1}{2} r .$$

Внося в (4.3) A_q из (4.1′) и PQ из (4.2), получим

$$A_m = \frac{6\sqrt{3}}{r} \int_0^{\frac{r}{2}} \left[\frac{2}{3} r\sqrt{3} - \sqrt{r^2 - y^2} \right]^2 dy =$$

$$= \left(\frac{15}{14}\sqrt{3} - 2\pi \right) r^2 = 0,2118 r^2 .$$

Итак, средняя по длине струйки величина площади сечения струйки равна

$$A_m = 0,2118\, r^2. \qquad (4.4)$$

Площадь равностороннего треугольника RST согласно (4.1) равна

$$A_r = 3\sqrt{3} \cdot \overline{OE}^2.$$

Внося сюда найденное выше значение $\overline{OE}$, получим

$$A_r = 3\sqrt{3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 \right)^2 r^2 = 0,1247 r^2 . \qquad (4.5)$$

Площадь криволинейного треугольника DFG равна площади равностороннего треугольника ABC минус три сектора круга с углами 60°, т. е. минус половина площади круга радиуса r. Но площадь треугольника ABC равна $r^2\sqrt{3}$, следовательно, площадью треугольника DFG будет

$$A_F = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) r^2 = 0,1613 r^2 \qquad (4.6)$$

(это и есть наименьшее сечение порового канала при $\theta = 60^\circ$).

Среднее арифметическое площадей A_r и A_F равно

$$A_{ср} = \frac{1}{2} (A_r + A_F) = 0,1430 r^2. \qquad (4.7)$$

Исходя из предположения, что в углах D, F, G сечения порового канала никакой фильтрации не происходит вслед-

ствие образования там так называемой *мёртвой жидкости*, Слихтер считает, что эффективная площадь наименьшего сечения порового канала, через которую происходит фильтрация, лежит между A_r и A_F, будучи несколько ближе к A_F, чем к A_r. Поэтому Слихтер принимает эффективную площадь немного бо́льшей (приблизительно на 3%), чем среднее значение, определяемое формулой (4.7), и полагает, что

$$A_e = 0{,}1475r^2. \tag{4.8}$$

На основании аналогичных соображений о существовании в углах порового канала зон мёртвой жидкости, Слихтер считает, что A_q будет переменной по длине струйки площадью эффективного сечения, среднее значение которой и есть величина, определяемая формулой (4.4). Из (4.4) и (4.8) получаем отношение

$$\frac{A_m}{A_e} = 1{,}436, \tag{4.9}$$

откуда

$$1 - \frac{A_m}{A_e} = \frac{A_e - A_m}{A_e} = 0{,}436,$$

т. е. среднее по длине струйки увеличение эффективной площади сечения составляет около 43,6% (для случая теснейшего расположения шаров).

Таким образом, для частного случая теснейшего расположения шаров ($\theta = 60°$) Слихтер заменяет действительный поровый канал $AKBHC$ сложного строения (фиг. 9) прямолинейным призматическим каналом AC, поперечное сечение которого есть равносторонний треугольник с площадью

$$A_m = 1{,}436A_e, \tag{4.10}$$

где A_e есть эффективная площадь порового канала в самом узком его месте.

Как показал Слихтер, из простых геометрических соображений можно найти, что длина l прямолинейного канала, заменяющего действительный криволинейный канал для случая $\theta = 60°$, равна

$$l = 1{,}065d. \tag{4.11}$$

Для случая $\theta = 90°$ имеем, очевидно,

$$l = d,$$

а для любого значения θ

$$l = d\left[1{,}195 - 0{,}39\frac{\theta}{\pi}\right]. \tag{4.12}$$

Таким образом, в общем случае длина l немного больше ребра $ML = d$ основного ромбоэдра.

§ 5. Фильтрация через фиктивный грунт по Слихтеру.

При рассмотрении явлений фильтрации в фиктивном грунте Слихтер заменяет действительную пору весьма сложного строения идеальной цилиндрической порой, площадь поперечного сечения которой равна площади поперечного сечения действительной поры в её самом узком месте, а длина поры равна ребру основного ромбоэдра, но не высоте его. В этом и состоит предложенный Слихтером переход от фиктивного грунта к идеальному. Слихтер оправдывает своё предложение тем, что оно, как мы сейчас увидим, имеет место при наиболее тесном расположении шаров, когда $\theta = 60°$.

В этом случае мы, согласно сказанному выше, имеем поровую трубку длины

$$l = 1{,}065d, \tag{5.1}$$

поперечное сечение которой есть равносторонний треугольник с площадью

$$A_m = 1{,}436A_e. \tag{5.2}$$

Тогда по формуле (2.25) имеем для средней скорости ламинарного течения выражение

$$w_0 = \frac{PA_m}{20\mu l\sqrt{3}}.$$

Внося сюда l и A_m по формулам (5.1) и (5.2), мы получим

$$w_0 = \frac{PA_e}{8\pi\mu d}, \tag{5.3}$$

так как с большой точностью мы имеем

$$\frac{1{,}065\cdot 20\sqrt{3}}{1{,}436}=8\pi\,.$$

Формула (5.3) совпадает с формулой (2.24), если в последней положить

$$\omega=A_e,\quad h=d.$$

Итак, действительно, при $\theta=60^\circ$ средняя скорость движения жидкости по поровому каналу оказывается такой, как если бы жидкость протекала через круглую цилиндрическую трубку, причём площадь сечения этой трубки равна A_e — площади наименьшего сечения порового канала; длина трубки равна d, т. е. равна длине ребра основного ромбоэдра.

Слихтер обобщает формулу (5.3) и на случай, когда $\theta>60^\circ$; в этом случае за площадь A_e Слихтер принимает половину площади S, определяемой формулой (3.7), так как при $\theta=60^\circ$ площадь S сводилась к двум одинаковым криволинейным равносторонним треугольникам. Итак, имеем

$$A_e=\frac{1}{2}\,d^2\left(\sin\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{nd^2}{2}\sin\theta. \tag{5.4}$$

Из формул (3.2) и (3.3) мы получаем важное соотношение

$$d=\frac{h\,(1+\cos\theta)}{\sin\theta\sqrt{1+2\cos\theta}}\,. \tag{5.5}$$

Внося (5.4) и (5.5) в (5.3), мы находим

$$w_0=\frac{Pd^2n}{16\pi\mu h}\,B(\theta), \tag{5.6}$$

где введено обозначение

$$B(\theta)=\frac{\sin^2\theta\sqrt{1+2\cos\theta}}{1+\cos\theta}\,, \tag{5.7}$$

которое можно представить также в виде

$$B(\theta)=(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}\,, \tag{5.8}$$

так как

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta).$$

Из формулы (3.6) мы имеем

$$(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}=\frac{\pi}{6(1-m)}.$$

Внося это значение в (5.8), мы получаем

$$B(\theta)=\frac{\pi}{6(1-m)}, \tag{5.9}$$

и формула (5.6) для средней скорости в поровой трубке принимает теперь вид

$$w_0=\frac{nd^2P}{96(1-m)\mu h}. \tag{5.10}$$

Площадь поперечного сечения поровой трубки, как было отмечено выше, равна $\frac{1}{2}S$; поэтому расход жидкости через поровую трубку равен $\frac{1}{2}S\cdot w_0$. Движение жидкости через ячейку фиктивного грунта из 8 шаров мы рассматривали как движение через две поровые трубки. Поэтому общий расход жидкости Q через такую ячейку равен

$$Q=Sw_0=nS_1w_0,$$

где S_1 — площадь ромба, лежащего в основании ромбоэдра, а n — просвет [см. формулу (3.8)].

Скорость фильтрации w, согласно определению, равна

$$w=\frac{Q}{S_1},$$

откуда следует, что скорость фильтрации в фиктивном грунте будет равна

$$w=nw_0. \tag{5.11}$$

Внося (5.10) в (5.11), мы получим известную формулу Слихтера для скорости фильтрации в фиктивном грунте

$$w=\frac{k}{\mu}\cdot\frac{P}{h}, \tag{5.12}$$

где величина k равна

$$k = \frac{n^2 d^2}{96\,(1-m)}\ ^{1}) \tag{5.13}$$

и называется *теоретической проницаемостью Слихтера*. Величину h мы должны рассматривать как толщину пласта в направлении фильтрации, на которой происходит перепад гидродинамического давления P. Для теоретического интервала

$$0{,}26 < m < 0{,}48, \tag{5.14}$$

в котором, по Слихтеру, заключена пористость фиктивного грунта, мы имеем приближённую формулу

$$\frac{1}{1-m} = C_1 \sqrt{m}, \tag{5.15}$$

а также формулу (3.10)

$$n = C_2 m^{1,4}, \tag{5.16}$$

где C_1 и C_2 суть постоянные факторы. Из (5.15) и (5.16) мы получаем

$$\frac{n^2}{1-m} = C_3 m^{3,3}, \tag{5.17}$$

где

$$C_3 = C_1 C_2^2 = 1{,}025.$$

Внося (5.17) в (5.13), мы получим приближённую формулу Эльдифрави

$$k = 0{,}01057 m^{3,3} d^2, \tag{5.18}$$

связывающую теоретическую проницаемость k с пористостью m.

Вернёмся к формуле (5.3). Обозначим в ней A_e через ω и подставим вместо d его значение из формулы (5.5); тогда мы получим из (5.3) формулу

$$w_0 = \frac{P\omega}{8\pi\mu h_1}, \tag{5.19}$$

---

[1]) Для удобства вычислений по формуле (5.13) в таблице 1 подсчитана величина $\sigma = \frac{1-m}{n^2}$ для фиктивного грунта.

причём, согласно (5.5), (5.7) и (5.9), мы имеем

$$\frac{h_1}{h}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{1+2\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{B(\theta)}=\frac{6(1-m)\sin\theta}{\pi}. \qquad (5.20)$$

Формула (5.19) выражает важную *теорему Слихтера:*

При определении средней скорости движения по поровому каналу надо вместо действительной толщины пласта h вводить фиктивную толщину h_1, определяемую по формуле (5.20).

Из формулы (3.9) мы имеем

$$\sin\theta=\frac{\pi}{4(1-n)}. \qquad (5.21)$$

Внося (5.21) в (5.20), мы получим

$$h_1=\frac{3(1-m)}{2(1-n)}h. \qquad (5.22)$$

Можно получить другую приближённую формулу для h_1. Так как

$$0\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{1}{2},$$

то имеем приближённо

$$\sqrt{1+2\cos\theta}=1+\cos\theta,$$

а потому из (5.8) получаем

$$B(\theta)=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta. \qquad (5.23)$$

Заменяя $B(\theta)$ его значением из (5.9), находим

$$\sin\theta=\sqrt{B(\theta)}=\sqrt{\frac{\pi}{6(1-m)}}. \qquad (5.24)$$

Внося (5.24) в (5.20), мы получим приближённую формулу

$$h_1=h\sqrt{\frac{\pi}{6(1-m)}}. \qquad (5.25)$$

§ 6. Фильтрация через фиктивный грунт по Козени.

Пусть в объёме V_1 фиктивного грунта имеется N_1 одинаковых шаровых частиц диаметра d. Сумма объёмов этих шаровых частиц равна

$$V_2=N_1\frac{\pi d^3}{6}, \qquad (6.1)$$

а сумма их поверхностей будет

$$\Sigma_2 = N_1 \pi d^2. \tag{6.2}$$

Из формулы (2.1) мы имеем

$$V_2 = (1 - m) V_1. \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в (6.1), мы получим

$$V_1 = N_1 \frac{\pi d^3}{6(1-m)}. \tag{6.4}$$

Следовательно, согласно формуле (2.1), сумма объёмов пор, содержащихся в объёме V_1 фиктивного грунта, равна

$$V_3 = mV_1 = N_1 \frac{m\pi d^3}{6(1-m)}. \tag{6.5}$$

Положив в (6.4) $V_1 = 1$, мы получим важную формулу, определяющую число N шаровых частиц диаметра d, содержащихся в единице объёма фиктивного грунта

$$N = \frac{6(1-m)}{\pi d^3}. \tag{6.6}$$

Сумма поверхностей этих N частиц будет, согласно (6.2), равна

$$\Sigma = \frac{6(1-m)}{d}. \tag{6.7}$$

Заменим объём V_1 фиктивного грунта таким же объёмом идеального грунта, составленного из N_2 поровых трубок одинаковой длины L, одинаковой площади поперечного сечения ω и одинакового периметра χ. Сумма объёмов этих поровых трубок будет суммой объёмов пор идеального грунта

$$V_3^0 = N_2 L \omega. \tag{6.8}$$

Сумма боковых поверхностей этих поровых трубок будет равна

$$\Sigma_2^0 = N_2 L \chi. \tag{6.9}$$

Козени предложил следующий способ перехода от фиктивного грунта к идеальному грунту:

1) сумма объёмов пор фиктивного грунта V_3 равна сумме объёмов поровых трубок идеального грунта V_3^0;

2) сумма поверхностей всех шаровых частиц фиктивного грунта Σ_2 равна сумме боковых поверхностей поровых трубок идеального грунта Σ_2^0;

3) пористость в обоих случаях одинакова.

Отсюда получаем уравнения

$$N_1 \frac{\pi d^3 m}{6(1-m)} = N_2 L\omega,$$
$$N_1 \pi d^2 = N_2 L\chi.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\delta = \frac{md}{6(1-m)}, \tag{6.10}$$

где δ есть гидравлический радиус поперечного сечения поровой трубки идеального грунта, определяемый формулой (2.7).

При вычислении скорости фильтрации по формуле (2.21), мы должны внести туда δ из формулы (6.10) и вместо толщины пласта h подставить фиктивную толщину его h_1, учитывающую искривление жидких струек. Тогда мы получим

$$w = \frac{m\delta^2 P}{\beta^2 \mu h_1} = \frac{m^3 d^2 P}{36\beta^2 (1-m)^2 \mu h_1}. \tag{6.10'}$$

Козени принимает, что

$$h_1 = 2h \tag{6.11}$$

и поэтому получает, что

$$w = \frac{k}{\mu}\frac{P}{h}, \tag{6.12}$$

где k есть теоретическая проницаемость по Козени, равная

$$k = \frac{m^3 d^2}{72\beta^2 (1-m)^2}\ ^{1}). \tag{6.13}$$

Мы предлагаем внести h_1 либо по формуле (5.22), либо по формуле (5.25). В первом случае будем иметь

$$k = \frac{m^3 (1-n) d^2}{54\beta^2 (1-m)^3}\ ^{1}), \tag{6.14}$$

---

[1]) Для удобства вычислений по формулам (6.13) и (6.14) в табл. 1 подсчитаны величины $\sigma_1 = \frac{5}{4}\frac{(1-m)^2}{m^3}$ и $\sigma_2 = \left(\frac{1-m}{m}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-n}$ для фиктивного грунта.

а во втором случае

$$k = \frac{m^3 d^2}{36\sqrt{\frac{\pi}{6}}\beta^2 (1-m)^{2/3}}. \qquad (6.15)$$

Козени принял для β^2 значение, определяемое формулой (2.29), считая, что поперечное сечение поровой трубки близко к равностороннему треугольнику. Внося это значение β^2 в (6.13), мы получим для теоретической проницаемости по Козени величину

$$k = \frac{m^3 d^2}{120 (1-m)^2}. \qquad (6.16)$$

Подставляя сюда вместо $\frac{1}{1-m}$ его приближённое значение по формуле (5.15), мы получим теоретическую проницаемость по Козени, выраженную через пористость:

$$k = C_4 m^4 d^2, \qquad (6.17)$$

где C_4 есть фактор пропорциональности.

Сравнивая два значения $\sin\theta$, определяемые формулами (5.21) и (5.24), мы имеем

$$1 - n = \sqrt{\frac{3\pi}{8}(1-m)}. \qquad (6.18)$$

Заменяя $1-m$ его приближённым значением из формулы (5.15), мы получим приближённую формулу

$$\frac{1}{1-n} = C_5 \sqrt[4]{m}, \qquad (6.19)$$

где C_5 есть фактор пропорциональности.

§ 7. Фильтрация через фиктивный грунт по Терцаги.

Терцаги (Terzaghi) предложил следующий способ перехода от фиктивного грунта к идеальному.

Число одинаковых шарообразных частиц, наполняющих в *очень большом* числе единицу объёма грунта, определяется формулой (6.6):

$$N = \frac{6(1-m)}{\pi d^3}, \qquad (7.1)$$

где m есть пористость, а d — диаметр шара. Пусть N_2 есть большое число шаровых частиц, приходящихся на единицу длины, тогда большое число их на единицу объёма будет

$$N = C_6 N_2^3, \tag{7.2}$$

где C_6 есть фактор пропорциональности. Сравнивая (7.1) и (7.2), мы получим

$$N_2 = \frac{C_7}{d}\sqrt[3]{1-m}, \tag{7.3}$$

где C_7 есть фактор пропорциональности. Большое число N_3 шаровых частиц, приходящихся на единицу площади, будет

$$N_3 = C_8 N_2^2, \tag{7.4}$$

где C_8 есть фактор пропорциональности. Большое число N_4 поровых трубок с одинаковыми поперечными сечениями, приходящимися на единицу площади, будет пропорционально числу N_3 шаровых частиц, образующих эти трубки, поэтому

$$N_4 = C_9 N_2^2, \tag{7.4'}$$

где C_9 есть фактор пропорциональности.

Обозначая попрежнему через L длину поровой трубки и через ω — её поперечное сечение, мы получим выражение пористости m в виде

$$m = N_4 \omega. \tag{7.5}$$

Исключая из (7.4) и (7.5) N_4, мы найдём

$$\omega = \frac{m}{C_9 N_2^2}. \tag{7.6}$$

Так как можно принять, что гидравлический радиус δ поперечного сечения поровой трубки пропорционален квадратному корню из площади сечения ω, то будем иметь

$$\delta^2 = C_{10}\omega. \tag{7.7}$$

Внося (7.7) в (2.22), мы получим

$$k = C_{11} m \omega, \tag{7.8}$$

где

$$C_{11} = \frac{C_{10}}{\beta^2}.$$

Если поперечное сечение есть равносторонний треугольник, то

$$C_{11} = \frac{1}{20\sqrt{3}};$$

если же оно есть круг, то

$$C_{11} = \frac{1}{8\pi}.$$

Отсюда видно, что C_{11} мало зависит от формы поперечного сечения поровой трубки, а следовательно, и от структуры грунта, и поэтому мы можем принять C_{11} за постоянную величину. Внося (7.8) в формулу (2.21), мы получим для скорости фильтрации выражение

$$w = C_{11} m \omega \frac{P}{\mu h}. \tag{7.9}$$

Подставляя в (7.9) ω из формулы (7.6), а затем N_2 из формулы (7.3), мы получим формулу Терцаги

$$w = \varepsilon \frac{m^2 d^2}{(1-m)^{2/3}} \cdot \frac{P}{\mu h}, \tag{7.10}$$

где ε есть новая постоянная.

Далее Терцаги обратил внимание, что при некоторой очень малой пористости m_0 фильтрация фактически прекращается. Поэтому он пишет формулу (7.10) в виде

$$w = \varepsilon \frac{(m-m_0)^2 d^2}{(1-m)^{2/3}} \frac{P}{\mu h}. \tag{7.11}$$

На основании опытных данных Терцаги принял для m_0 значение

$$m_0 = 0{,}13. \tag{7.12}$$

Значение ε зависит от структуры грунта. Так, например, для песка с гладкой поверхностью

$$\varepsilon = 10{,}5, \tag{7.13}$$

а для песка с угловатой поверхностью

$$\varepsilon = 6{,}0. \tag{7.14}$$

Таким образом, *теоретическая проницаемость* фиктивного грунта по Терцаги равна

$$k = \varepsilon \frac{m^2 d^2}{(1-m)^{2/3}}. \tag{7.15}$$

Применяя соотношение (5.15), мы получим для теоретической проницаемости фиктивного грунта по Терцаги приближённое выражение

$$k = \varepsilon_2 d^2 m^{7/2}. \tag{7.16}$$

Инженер И. И. Зауэрбрей предложил заменить формулу Терцаги (7.11) следующей:

$$w = \varepsilon \frac{(m - m_0)^2 d^2}{\mu (1 - m)} \frac{P}{h}, \tag{7.17}$$

как более согласующейся с его собственными опытами.

§ 8. Приложение метода обтекания к теории фильтрации в фиктивном грунте.

При протекании жидкости через грунт происходит по существу обтекание частиц грунта жидкостью. В случае фиктивного грунта мы имеем обтекание вязкой жидкостью системы соприкасающихся шаров. При обтекании одного шара вязкой жидкостью, скорость которой вдали от шара постоянна и равна w, имеем формулу Стокса для силы сопротивления шара

$$P' = 3\pi\mu\, dw, \tag{8.1}$$

где d есть диаметр шара.

В действительности мы имеем в грунте обтекание не одного шара, а цепочки соприкасающихся шаров. Приближённо можно сказать, что шары помещены в канале, наружной стенкой которого является цилиндрическая поверхность, проходящая через середину слоя жидкости, обтекающего цепочку шаров. Следовательно, жидкость не прилипает к наружной стенке канала, а скользит вдоль неё с некоторой скоростью v. При этом не происходит протока жидкости ни через наружную, ни через внутреннюю стенки канала. На поверхности шаров скорость вязкой жидкости равна нулю.

Мы примем, как и в методе Слихтера, что движение жидкости во всём поровом канале происходит так же, как и в самом узком месте этого канала. Такое предположение тем более справедливо, что в областях вблизи точек касания шаров имеется застойная жидкость, не принимающая участия в движении. Таким образом, приближённая схема

обтекания шаров фиктивного грунта приводит к равномерному течению вязкой жидкости в узкой области между двумя круглыми цилиндрами, из которых внутренний имеет диаметр d, а внешний — диаметр d_1. Диаметр d_1 мы определим из условия, что площадь круга диаметра d_1 равна площади основного ромба $d^2 \sin\theta$. Если мы введём просвет n по формуле (3.9), то площадь прохода в самом узком месте будет

$$\frac{n\pi d_1^2}{4},$$

и она равна разности площадей поперечных сечений обоих цилиндров, т. е.

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2),$$

следовательно,

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2) = \frac{n\pi d_1^2}{4}.$$

Отсюда имеем

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{1-n}}. \tag{8.2}$$

Ввиду малости n приближённо можно положить, что

$$d_1 = d\left(1 + \frac{n}{2}\right). \tag{8.3}$$

Расстояние между обеими цилиндрическими поверхностями равно

$$\delta = \frac{d_1 - d}{2} = \frac{nd}{4}. \tag{8.4}$$

Если принять, что скорость течения вязкой жидкости между цилиндрами падает, по закону прямой линии, от значения v на внешнем цилиндре до нуля на внутреннем, то средняя скорость будет $\frac{v}{2}$. Это будет средняя скорость в самом узком месте сечения порового канала, в котором находятся шары. Поэтому мы имеем уравнение расхода

$$\frac{nv}{2} = w. \tag{8.5}$$

Очевидно, интенсивность трения вязкой жидкости на поверхности внутреннего цилиндра τ будет равна

$$\tau = \frac{\mu v}{\delta}. \tag{8.6}$$

Внося v из (8.5) в (8.6), мы получим

$$\tau = \frac{2\mu w}{n\delta}.$$

Заменяя δ его значением (8.4), мы найдём

$$\tau = \frac{8\,\mu w}{dn^2}. \tag{8.7}$$

Боковая поверхность внутреннего цилиндра, в которую вписан шар, очевидно, равна

$$\pi d \cdot d = \pi d^2.$$

Следовательно, происходящее от трения вязкой жидкости сопротивление одного шара будет

$$P' = \pi d^2 \tau. \tag{8.8}$$

Внося (8.7) в (8.8), мы получим

$$P' = \frac{8\pi\mu\, dw}{n^2}. \tag{8.9}$$

Силу сопротивления P' одного шара надо умножить на число шаров, содержащихся в объёме пласта толщины h и площади поперечного сечения F. Это число мы найдём из формулы (6.4), положив в ней

$$V_1 = Fh,$$

что даёт

$$N_1 = \frac{6(1-m)}{\pi d^3} Fh. \tag{8.10}$$

Следовательно, полная сила трения P_2, возникающая при обтекании вязкой жидкостью N_1 шарообразных частиц в объёме V_1, будет равна

$$P_2 = P' N_1 = \frac{6(1-m)}{\pi d^3} \cdot \frac{8\pi\mu\, dw}{n^2} Fh,$$

или

$$P_2 = \frac{48(1-m)\,\mu\, whF}{n^2 d^2}. \tag{8.11}$$

Но эта сила трения P_2 преодолевается только вследствие того, что при протекании через толщину h фиктивного грунта теряется величина P гидродинамического давления. Так как давление P относится к единице площади, то на всю площадь F потребуется сила PF для преодоления сопротивления трения P_2. Отсюда мы имеем соотношение

$$PF = P_2. \tag{8.12}$$

Внося сюда P_2 из (8.11), мы получим

$$PF = \frac{48(1-m)\mu w h}{n^2 d^2} F, \tag{8.13}$$

откуда

$$w = \frac{k}{\mu}\frac{P}{h}, \tag{8.14}$$

где величина

$$k = \frac{n^2 d^2}{48(1-m)} \tag{8.15}$$

есть теоретическая проницаемость.

Сравнивая (8.15) с (5.13), мы видим, что структура обеих формул одинакова, но величина k, по Слихтеру, вдвое меньше, чем по новой формуле.

§ 9. Приложение метода размерностей к теории фильтрации жидкостей.

Теоретические исследования Слихтера, Козени и других, изложенные в предыдущих параграфах, приводят для скорости ламинарной фильтрации в фиктивном грунте к формулам одного и того же вида

$$w = \frac{k}{\mu}\frac{P}{h}, \tag{9.1}$$

но с разными значениями проницаемости k. Проницаемость k имеет размерность площади и выражается через гидравлический радиус поперечного сечения поровой трубки идеального грунта, заменяющего фиктивный грунт, в виде

$$k = \delta^2 f(m, n), \tag{9.2}$$

где $f(m, n)$ есть определённая функция от пористости m и просвета n, имеющая у каждого автора свою форму.

Умножив обе части (9.1) на $\frac{\rho}{\mu}\sqrt{k}$, мы получим

$$\frac{w\rho\sqrt{k}}{\mu} = \frac{\rho k^{3/2} P}{\mu^2 h}. \tag{9.3}$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\mathrm{R} = \Omega, \tag{9.4}$$

если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R} &= \frac{w\rho\sqrt{k}}{\mu}, \\ \Omega &= \frac{\rho k^{3/2} P}{\mu^2 h} \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Легко видеть, что обе эти величины R и Ω суть безразмерные величины, причём первая из них есть не что иное, как число Рейнольдса (так как $\sqrt{k}$ есть линейная величина), характеризующее движение жидкости по порам грунта. Величина Ω называется *числом фильтрации*. Соотношение (9.4), имеющее место при ламинарной фильтрации, есть частный случай общего закона

$$\Omega = F(\mathrm{R}), \tag{9.6}$$

имеющего место при любом режиме фильтрации жидкости в грунте.

Для доказательства этого закона применим метод размерностей. Обобщая формулу (9.1) для ламинарной фильтрации, мы примем, что при любом режиме фильтрации скорость фильтрации w есть некоторая функция от:

1) перепада давления P на толщине пласта h,
2) проницаемости k,
3) плотности жидкости ρ,
4) вязкости жидкости μ,

т. е. примем, что

$$w = \varphi\left(\frac{P}{h},\ k,\ \rho,\ \mu\right), \tag{9.7}$$

причём предположим, что функция φ может разлагаться в степенной ряд по своим аргументам.

На основании сделанных допущений напишем

$$w = \sum B_\alpha \left(\frac{P}{h}\right)^\alpha k^\beta \rho^\gamma \mu^\delta, \tag{9.8}$$

где B_α суть числовые коэффициенты. После подстановки в правую часть формулы (9.8) размерностей входящих в неё величин (относительно основных единиц M, L, T), мы получим

$$\left[\left(\frac{P}{h}\right)^\alpha k^\beta \rho^\gamma \mu^\delta\right] = M^{\alpha+\gamma+\delta} L^{-2\alpha+2\beta-3\gamma-\delta} T^{-2\alpha-\delta}. \tag{9.9}$$

Но из (9.8) следует, что каждый член суммы, стоящей в правой части, имеет размерность скорости, т. е.

$$LT^{-1}. \tag{9.10}$$

Поэтому, сравнивая (9.9) и (9.10), имеем

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + \delta &= 0, \\ -2\alpha + 2\beta - 3\gamma - \delta &= 1, \\ -2\alpha - \delta &= -1. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений даёт

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha, \\ \gamma &= -1 + \alpha, \\ \delta &= 1 - 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Внося (9.11) в (9.8), мы получим

$$w = \frac{\mu}{\rho\sqrt{k}} \sum B_\alpha \left(\frac{P\rho k^{3/2}}{h\mu^2}\right)^\alpha,$$

откуда следует формула

$$\frac{w\rho\sqrt{k}}{\mu} = \sum B_\alpha \left(\frac{P\rho k^{3/2}}{h\mu^2}\right)^\alpha. \tag{9.12}$$

Вводя обозначения (9.5), мы найдём

$$\mathrm{R} = \sum B_\alpha \Omega^\alpha \tag{9.13}$$

или, принимая, что функция f развёртывается в степенной ряд, получим

$$\mathrm{R} = f(\Omega), \tag{9.14}$$

откуда, обратно, имеем

$$\Omega = F(R).$$

Эта формула совпадает с (2.17), что и должно быть, так как фиктивный грунт приводится к идеальному грунту, для которого построена формула (2.17).

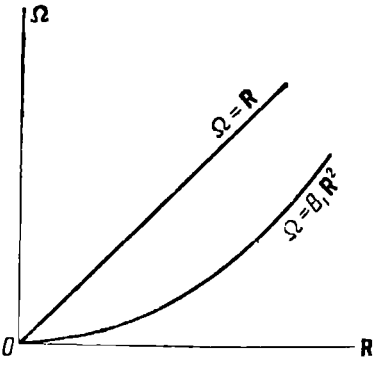
Откладывая на оси абсцисс значения R, а по оси ординат — значения Ω (фиг. 14), получим графическое изображение зависимости (9.6). Для известных нам режимов зависимость (9.6) может быть взята в виде

$$\Omega = B_1 R^s, \qquad (9.15)$$

причём

1) для ламинарной фильтрации

$$s = 1, \quad B_1 = 1;$$



Фиг. 14.

в этом случае получается прямая, проходящая через начало координат и делящая пополам угол между осями;

2) для квадратичной турбулентной фильтрации

$$s = 2;$$

в этом случае получается парабола второй степени, проходящая через начало координат и касающаяся здесь оси абсцисс;

3) для случая закона Смрекера

$$s = \frac{3}{2},$$

и получается параболического вида кривая, проходящая также через начало координат и касающаяся здесь оси абсцисс.

§ 10. Видоизменение основной формулы теории фильтрации.

Если безразмерную величину R разделим на безразмерную величину Ω, то получим новую безразмерную величину

$$\sigma = \frac{R}{\Omega}, \qquad (10.1)$$

называемую *производным числом фильтрации*. Внося значения R и Ω из (9.5) в (10.1), будем иметь

$$\sigma = \frac{w\mu h}{Pk}. \tag{10.2}$$

Разделив обе части формулы (9.14) на Ω, мы получим, вследствие (10.1), формулу

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} f(\Omega) = \Phi_2(\Omega). \tag{10.3}$$

Внося сюда Ω из (9.6), будем иметь

$$\sigma = \Psi(R). \tag{10.4}$$

Это равенство имеет такую же общность, как и равенство (9.6) и также представляет собой *самую общую формулу теории фильтрации*; формула (10.4) выражает собой следующее: *производное число фильтрации есть функция числа Рейнольдса.*

Из (9.4) и (10.1) мы имеем для случая ламинарной фильтрации соотношение

$$\sigma = 1. \tag{10.5}$$

Внося (9.15) в (10.1), мы получим

$$\sigma = \frac{1}{B_1} R^{1-s}. \tag{10.6}$$

Следовательно, для чисто турбулентной фильтрации, когда $s = 2$, будет

$$\sigma = \frac{1}{B_1} R^{-1}, \tag{10.7}$$

а для случая Смрекера, когда $s = \frac{3}{2}$, будет

$$\sigma = \frac{1}{B_1} R^{-1/2}. \tag{10.8}$$

(здесь B_1 есть некоторая постоянная).

§ 11. Переход от фиктивного грунта к естественному.

Представление о составе и строении естественного грунта получается из данных механического анализа и определения его пористости. Механический анализ даёт групповые харак-

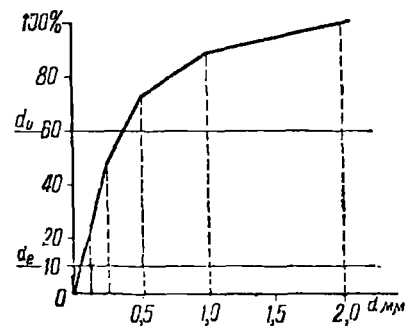
теристики состава грунта, указывая процентное содержание отдельных фракций. На основании произведённого механического анализа строится кривая весового участия фракций. Для этого по оси абсцисс откладывают диаметры песчинок, а по оси ординат — сумму процентного весового содержания всех фракций, начиная от нуля и кончая данным диаметром.

Конечно, частицы естественного грунта далеки от шаровой формы, но точная оценка действительной формы частиц вряд ли возможна.

Пусть в 1 $см^3$ имеются следующие фракции частиц или, как часто говорят, зёрен:

Диаметр от и до: $0 - d_1$ $d_1 - d_2$ $d_2 - d_3$ $d_3 - d_4$ и т. д.
Вес фракций: Δg_1 Δg_2 Δg_3 Δg_4 и т. д.

Построение графика механического анализа ведётся, согласно сказанному выше, следующим образом (фиг. 15). На оси абсцисс откладываем длину, равную d_1, а на соответственной ординате — длину, равную Δg_1. Далее, на оси абсцисс откладываем длину, равную $d_1 + d_2$, а на соответственной ординате — длину, равную $\Delta g_1 + \Delta g_2$. Продолжая построение, придём в конце концов к последней точке кривой с ординатой, равной 100, так как



Фиг. 15.

$$\Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \ldots = 100.$$

За средний диаметр d_i какой-либо фракции i принимают среднее арифметическое крайних диаметров d_i' и d_i'' этой фракции:

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i' + d_i''). \qquad (11.1)$$

Таким образом, первый шаг состоит в разбиении естественного грунта на фракции шарообразных частиц одинакового в каждой группе диаметра. Затем уже устанавливается

связь между этим как бы коррегированным естественным грунтом и грунтом фиктивным, *составленным из шарообразных частиц одинакового по всему грунту диаметра* d_e, *называемого эффективным диаметром*. Для определения эффективного диаметра предложен ряд способов.

1. *Способ среднего диаметра.* Пусть имеется ряд фракций:

N_1 частиц — диаметра d_1,
N_2 частиц — диаметра d_2,
N_3 частиц — диаметра d_3 и т. д.

За эффективный диаметр принимается величина

$$d_e = \frac{N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}. \qquad (11.2)$$

Этот способ определения d_e употребляется редко.

2. *Способ счета и взвешивания* предложен американским учёным Кингом (F. King), которому принадлежит громадная экспериментальная работа о движении грунтовых вод (1893 — 1897 гг.), напечатанная совместно с работой Слихтера. При применении этого способа нужно определить суммарную поверхность всех частиц в 1 $см^3$, затем разделить полученную величину на полное число частиц и приравнять полученный таким образом результат поверхности эффективной частицы. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\sum N\pi d^2}{\sum N} = \pi d_e^2,$$

откуда

$$d_e = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sqrt{\frac{\sum N\pi d^2}{\sum N}}. \qquad (11.3)$$

Если m есть пористость, то для каждой фракции частиц диаметра d_i с общим числом частиц N_i и объёмом Δg_i (в процентах по весу на 1 $см^3$) мы получим:

$$0{,}01\Delta g_i (1 - m) = N_i \frac{\pi d_i^3}{6},$$

откуда

$$N_i = \frac{6(1-m)}{\pi d_i^3} \frac{\Delta g_i}{100},$$

следовательно,

$$N_i \pi d_i^2 = \frac{6(1-m)}{100} \frac{\Delta g_i}{d_i}.$$

Суммарная поверхность всех частиц всех фракций в 1 $см^3$ будет

$$\theta = \sum N_i \pi d_i^2 = \frac{6(1-m)}{100} \sum \frac{\Delta g_i}{d_i}. \qquad (11.4)$$

Тогда вместо (11.3) получим

$$d_e = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sqrt{\frac{\theta}{\sum N}}. \qquad (11.5)$$

Повидимому, именно этот способ имеет в виду Слихтер, так как Кинг называет его наиболее распространённым в США.

3. *Способ веса средней частицы.* Считая, что удельный вес γ всех фракций одинаковый, мы получим для суммы весов всех фракций в 1 $см^3$ величину

$$\gamma \sum N_i \frac{\pi d_i^3}{6}.$$

Следовательно, вес средней частицы будет равен

$$\gamma \frac{\pi d_e^3}{6} = \frac{\gamma}{\sum N_i} \sum N_i \frac{\pi d_i^3}{6},$$

откуда находим

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{\sum N_i d_i^3}{\sum N_i}}. \qquad (11.6)$$

Этот способ мало применяется в практике.

4. *Способ Зельгейма* состоит в определении среднего весового диаметра. Имеем

$$d_e = \frac{\sum (\Delta g_i) d_i}{\sum \Delta g_i} = \frac{\sum (\Delta g_i) d_i}{100}. \qquad (11.7)$$

Этот способ мало рационален, так как недостаточно отражает строение грунта.

5. *Способ Аллана Газена.* В этом способе за эффективный диаметр принимается такой диаметр шарообразной

частицы, при котором сумма весов всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, составляет 10% от веса всех фракций. При этом так называемый *коэффициент однородности*, равный отношению $\frac{d_0}{d_e}$, должен быть не более пяти. В этом отношении числитель d_0 есть тот диаметр шарообразной частицы, при котором сумма весов всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, равна 60% от веса всех фракций.

Величины d_0 и d_e берутся с кривой весового участия фракций, обычно представляющей ломаную линию (фиг. 15).

Способ Аллана Газена имеет частое применение, так как предложенная Газеном на основании обширных опытов эмпирическая формула для определения скорости фильтрации получила большое распространение. Предполагается, что

$$0{,}01\ см \leqslant d_e \leqslant 0{,}3\ см.$$

6. *Способ И. Зауэрбрея.* Инженер И. Зауэрбрей, много занимавшийся вопросами фильтрации в Ленинградском институте гидротехники, на основании произведённой им обработки опытов предложил принимать за эффективный диаметр тот, для которого сумма весов всех фракций, начиная от нуля и кончая этим диаметром, составляет 17% от веса всех фракций.

7. *Способ Крюгера — Цункера.* Формула (11.4) даёт суммарную поверхность всех частиц в одном кубическом сантиметре при различном фракционном составе. В фиктивном грунте все частицы должны иметь при той же пористости одинаковый эффективный диаметр d_e, что приводит к равенству

$$\theta = \frac{6(1-m)}{100}\sum\frac{\Delta g_i}{d_i} = \frac{6(1-m)}{d_e},$$

откуда получается основное уравнение

$$\frac{100}{d_e} = \sum\frac{\Delta g_i}{d_i}, \tag{11.8}$$

имеющее обширное приложение в практике. Диаметр d_i определяется по формуле (11.1).

8. *Способ Козени.* Эффективный диаметр определяется по формуле

$$\frac{100}{d_e} = \sum_{i=2}^{i=n}\frac{\Delta g_i}{d_i} + \frac{3}{2}\frac{\Delta g_1}{d_1}. \tag{11.9}$$

Здесь d_1 есть верхний крайний диаметр последней фракции (фракции с диаметром $d < 0{,}0025$ *мм*), а Δg_1 — доля веса грунта, падающая на эту фракцию, выраженная в процентах. Диаметр d_i определяется по формуле

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_i'} + \frac{1}{d_i''}\right) \tag{11.10}$$

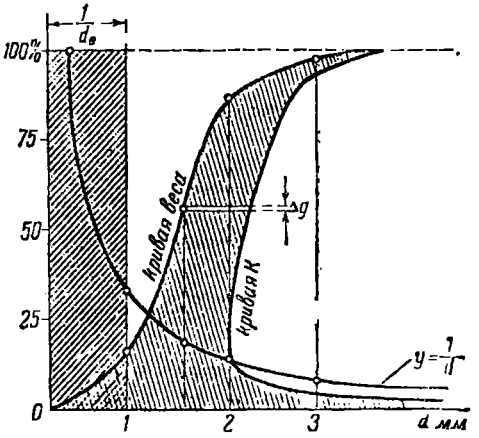
или по более точной:

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{d_i'} + \frac{2}{d_i' + d_i''} + \frac{1}{d_i''}\right]. \tag{11.11}$$

Если анализ сделан только до фракции $d < 0{,}01$ *мм*, то Козени разбивает эту фракцию линейно на четыре подфракции:

0 — 0,0025 *мм*,
0,0025 — 0,0050 *мм*,
0,0050 — 0,0075 *мм*,
0,0075 — 0,01 *мм*.

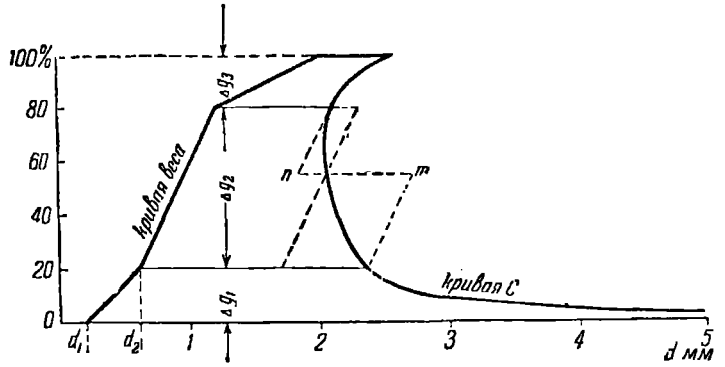
Для лучшего выяснения механического состава грунта Козени вводит следующее графическое представление (фиг. 16).



Фиг. 16.

Построив, как и на фиг. 15, кривую весового участия фракций грунта (на фиг. 16 обозначена как кривая веса), откла-

дываем от точек этой кривой в направлении положительной оси абсцисс соответствующие этим точкам величины $\frac{1}{d}$. Полученные таким образом точки лежат на *кривой Козени*. Отрезки горизонталей между обеими кривыми равны $\frac{1}{d}$. Если



Фиг. 17.

на оси ординат отложить величины весовых фракций грунта, т. е. Δg_i, то величина

$$\sum \frac{\Delta g_i}{d_i}$$

будет площадью между обеими кривыми (весовой и Козени), а, следовательно, равновеликая этой площади площадь прямоугольника с высотой 100 будет иметь основание $\frac{1}{d_e}$. В самом деле, мы имеем

$$\frac{100}{d_e} = \sum \frac{\Delta g_i}{d_i}. \tag{11.12}$$

В случае отсутствия упомянутых малых фракций формула (11.9) заменяется формулой

$$\frac{100}{d_e} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\Delta g_i}{d_i}. \tag{11.13}$$

Наибольшее значение для эффективного диаметра получается при подсчёте по способу Газена, а наименьшее — по способу Зельгейма.

9. *Способ Е. А. Замарина.* Этот способ изложен в монографии Е. А. Замарина о движении грунтовых вод и представляет собой видоизменение способа Козени, так как в действительности кривая весового участия фракции есть ломаная прямая (фиг. 17). Пусть угловые коэффициенты (относительно оси d) последовательных прямых отрезков, из которых состоит весовая кривая, будут A_1, A_2, A_3, ..., а диаметры частиц равны d_1, d_2, d_3, ...; тогда, если кривая веса не начинается от нуля, Замарин определяет эффективный диаметр следующим образом:

$$\frac{1}{d_e} = \sum_{i=1}^{n} A_i \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}. \tag{11.14}$$

Если же кривая веса начинается от нуля, то вводится поправка Козени, что даёт

$$\frac{1}{d_e} = \sum_{i=2}^{n} A_i \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{3}{2} \frac{\Delta g_1}{d_1}. \tag{11.15}$$

Величина d_e, вычисленная по способу Замарина, больше d_e по Козени, но меньше d_e по Крюгеру.

§ 12. Основная формула Дарси.

В средине XIX столетия известный французский исследователь инженер Дарси дал формулу для скорости ламинарной фильтрации через грунт в следующем виде:

$$w = Kj. \tag{12.1}$$

Здесь j есть безразмерная величина, называемая *гидравлическим уклоном* и равная

$$j = \frac{H}{h}, \tag{12.2}$$

где величина H равна перепаду давления P на толщине пласта h в направлении фильтрации, делённому на удельный вес жидкости, т. е.

$$H = \frac{P}{\gamma}. \tag{12.3}$$

Величина K называется *коэффициентом фильтрации Дарси*.

В § 10 нами была выведена основная формула фильтрации (10.2). Так как Дарси рассматривал только ламинарную фильтрацию, для которой

$$\sigma = 1,$$

то основная формула для скорости ламинарной фильтрации принимает вид

$$w = \frac{k}{\mu}\frac{P}{h}. \tag{12.4}$$

Сравнивая формулы (12.1) и (12.4), мы получаем соотношение между коэффициентом фильтрации Дарси K и проницаемостью k:

$$K = \frac{k\gamma}{\mu}. \tag{12.5}$$

§ 13. Старые формулы для коэффициента фильтрации Дарси.

Для теоретических исследований формулу Дарси (12.1) удобнее представить в виде

$$w = K\frac{P}{\gamma h}. \tag{13.1}$$

Гидравлики XIX столетия, изучавшие исключительно фильтрацию воды через различные грунты, старались дать расчётные формулы для коэффициента K, исходя из механического анализа грунта и используя те способы перехода от естественного грунта к фиктивному, которые были нами изложены в § 11. Мы приведём некоторые из этих формул.

1. *Формула Зельгейма*:

$$K = 0{,}5\frac{d^2}{\mu}, \tag{13.2}$$

где d есть эффективный диаметр, определяемый по формуле (11.7), а μ — вязкость жидкости. Для воды

$$K = 37{,}6\, d^2\tau,$$

где τ есть коэффициент, учитывающий влияние температуры;

для фильтрации воды через песок он определяется формулой

$$\tau = 1 + 0{,}0135t + 0{,}000704t^2,$$

где t есть температура воды в градусах Цельсия.

2. *Формула Аллана Газена*:

$$K = C\frac{d^2}{\mu}, \tag{13.3}$$

где d есть эффективный диаметр, определяемый по методу Газена (§ 11). Величина C учитывает пористость и меняется в широких пределах:

$C = 0{,}80$ для очень плотных песков,

$C = 1{,}55$ для песков средней пористости,

$C = 2{,}00$ для песков, составленных из округлённых частиц почти одинакового диаметра.

Для воды

$$K = 75Cd^2(0{,}70 + 0{,}03t), \tag{13.4}$$

где t есть температура в градусах Цельсия.

Формула Аллана Газена имеет широкое распространение для воды.

3. *Формула Слихтера*:

$$K = 10{,}22\frac{d^2}{\mu\sigma}, \tag{13.5}$$

где d есть эффективный диаметр, определяемый одним из способов § 11, а σ есть коэффициент, зависящий от конфитурации шарообразных частиц и равный $\frac{1-m}{n^2}$. Значения этого коэффициента даны в таблице 1 (см. стр. 23).

Для воды при 10° Ц вязкость равна $\mu = 0{,}01333$ пуаза и формула Слихтера принимает вид

$$K_{10^\circ} = 766\frac{d^2}{\sigma}. \tag{13.6}$$

4. *Формула Козени*:

$$K = 8{,}2\frac{d^2}{\mu}\frac{m^3}{(1-m)^2}, \tag{13.7}$$

где d есть эффективный диаметр, определяемый по способу Козени, изложенному в § 11. Для воды при $t = 18°$ Ц

$$K_{18°} = 780 \frac{m^3 d^2}{(1-m)^2}. \tag{13.8}$$

Формула Козени была подвергнута экспериментальной проверке в работах Доната (Вена), И. И. Зауэрбрея (Ленинград) и Е. А. Замарина, причём последний использовал опыты Крюгера. Особенно важные результаты были получены И. И. Зауэрбреем, сопоставившим результаты опытов Доната и своих собственных для фильтрации воды в песке при 18° Ц. Он даёт формулу Козени в следующем виде:

$$K_{18°} = \beta \frac{m^3 d^2}{(1-m)^2}, \tag{13.9}$$

где β имеет следующие значения:

1) для грунта, составленного из очень неправильных частиц $\beta = 167$;

2) для грунта, составленного из нормальных частиц $\beta = 300 \div 330$;

3) для грунта, составленного из однообразных частиц $\beta = 500$.

Для случая других жидкостей (не воды) формула (13.9) заменяется следующей:

$$K = 0{,}0105\, \beta \frac{m^3 d^2}{(1-m)^2 \mu}. \tag{13.10}$$

5. *Формула И. И. Зауэрбрея.* При очень неравномерном составе грунта результаты применения формулы Козени с использованием того значения эффективного диаметра, которое даёт метод самого Козени, оказываются недостаточно удовлетворительными. Поэтому пробовали применять формулу Козени, в которой за эффективный диаметр брали его величину, вычисленную по методу Аллана Газена. Зауэрбрей нашёл, что наилучшие результаты даёт применение следующей формулы:

$$K_{18°} = \beta_1 \frac{m^3}{(1-m)^2} d^2, \tag{13.11}$$

где d есть эффективный диаметр, определённый по способу

Зауэрбрея (§ 11). Коэффициент β_1 колеблется в интервале

$$135 < \beta_1 < 350,$$

но обычно его значение равно $\beta_1 = 330 \div 350$.

6. *Формула Е. А. Замарина.* Е. А. Замарин нашёл, что формула Козени даёт для воды результаты, находящиеся в наилучшем согласовании с опытами Крюгера, если её представить в виде

$$K_{18^\circ} = 800\,\frac{m^3 d^2 a^2}{(1-m)^2},$$

где

$$a = 1{,}275 - 1{,}5\,m, \tag{13.12}$$

причём эффективный диаметр d следует определить по способу Замарина (§ 11). Для других жидкостей (не воды) формула Замарина имеет вид

$$K = 8{,}4\,\frac{d^2 m^3 (1{,}275 - 1{,}5m)^2}{\mu\,(1-m)^2}.$$

Многочисленные опыты, производившиеся с целью проверки закона фильтрации и вывода формул для коэффициента фильтрации, подтвердили результаты теории, но выявили необходимость введения различных числовых коэффициентов, учитывающих свойства пористой среды.

§ 14. Определение коэффициента фильтрации по величине проницаемости.

За последние годы в США среди инженеров, занимающихся вопросами фильтрации нефти, получил широкое распространение способ экспериментального определения коэффициента фильтрации по величине проницаемости пористой среды.

Обращаясь к формуле (12.5), мы видим, что коэффициент фильтрации K выражается через проницаемость k, поэтому определение коэффициента фильтрации сводится к определению проницаемости k. Из уравнения (12.4) мы имеем

$$k = \frac{w\mu h}{p} \tag{14.1}$$

Принимая в правой части формулы (14.1) все величины, равными единице, мы получим единицу для проницаемости k. В абсолютной системе единиц CGS получается неудобная для практических целей единица проницаемости, поэтому в США принимают: за единицу толщины пласта — один сантиметр, за единицу перепада давления — одну атмосферу, за единицу скорости — один сантиметр в секунду и за единицу вязкости — один центипуаз (одна сотая пуаза). Тогда для проницаемости получается единица, называемая *дарси* (в честь французского инженера Дарси, положившего основы теории фильтрации).

В практике применяют также следующие производные единицы:

децидарси = 0,1 дарси,
центидарси = 0,01 дарси,
миллидарси = 0,001 дарси,
микродарси = 0,000001 дарси.

В случае идеального грунта для проницаемости мы имели теоретическую формулу (2.22), которую можно представить в виде

$$k = f_1(m)\,\delta^2, \tag{14.2}$$

где $f_1(m)$ есть определённая функция пористости m, а δ — гидравлический радиус поперечного сечения поровой трубки. В случае фиктивного грунта для проницаемости мы получили формулы (5.13), (6.16), (7.15) и (8.15), которые можно представить в виде

$$k = f_2(m)\,d^2, \tag{14.3}$$

где $f_2(m)$ есть определённая функция пористости m, а d — диаметр шарообразной частицы, заменяемой при переходе к естественному грунту эффективным диаметром d_e.

Из формул (14.2) и (14.3) следует, что при одной и той же пористости проницаемость будет тем меньше, чем меньше размер частиц, из которых построен грунт, ибо тем уже будут каналы, по которым пробирается жидкость и, следовательно, тем хуже будет фильтрация. Наоборот, при одном и том же размере частиц, из которых построен грунт, проницаемость зависит от пористости, возрастая вместе с ней приблизительно по степенному закону.

Американские исследования показали, что в общем теоретические закономерности (14.2) и (14.3) подтверждаются, но ввиду разнообразия пород, слагающих нефтяные месторождения, нельзя найти определённой аналитической зависимости между проницаемостью и пористостью.

В одном и том же нефтяном пласте проницаемость, измеренная вдоль напластования, оказывается, обычно, значительно бо́льшей, чем проницаемость в направлении, перпендикулярном к напластованию.

Некоторое представление о величине проницаемости даёт таблица 2.

Таблица 2. **Значения проницаемости пласта III Venango в одной из скважин нефтяного месторождения Oil Sity (США).**

Глубина в футах от кровли продуктивного горизонта	Пористость в %	Проницаемость в миллидарси
1,0	3,4	0,0161
3,6	8,5	58,9
5,6	14,6	13,4
15,2	9,9	60,4
18,1	19,6	171,4
21,1	12,4	171,0
24,1	11,3	69,5
27,2	17,6	60,5
30,2	11,8	56,2
33,2	11,0	541,0
35,5	7,7	40,8
38,2	13,3	101,0
40,1	8,7	0,904

Для экспериментального определения проницаемости были предложены в США и у нас, в СССР, различные приборы, с помощью которых было сделано большое количество измерений в пористых породах нефтяных месторождений.

§ 15. Влияние существования жидкой плёнки около частиц грунта на пористость и проницаемость.

Вследствие образования около частиц грунта очень тонких плёнок жидкости, прилипающей к частицам, величина пористости, очевидно, изменяется. Та пористость фиктивного грунта, которая определяется формулой (3.6) Слихтера,

есть *геометрическая*, или *истинная пористость*. Её мы не наблюдаем в действительности, так как некоторая часть жидкости, заполняющей фиктивный грунт, образует так называемую мёртвую зону и как бы связана с грунтом. Это равносильно некоторому увеличению диаметра шарообразной частицы от значения d до d_1, без изменения расстояния между центрами частиц. Получающуюся при этом пористость мы назовём эффективной.

Обозначая её через m_1, будем иметь

$$m_1 = 1 - \frac{V_2'}{V_1}.$$

где [см. формулу (3.4)] (15.1)

$$V_2' = \frac{\pi d_1^3}{6}, \quad V_1 = \frac{d^3 \sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + 2\cos\theta},$$

Отсюда имеем

$$m_1 = 1 - \frac{\pi (1+\zeta)^3}{6 (1 - \cos\theta) \sqrt{1 + 2\cos\theta}}, \qquad (15.2)$$

причём

$$\zeta = \frac{d_1}{d} - 1.$$

Раскрывая скобки в выражении $(1+\zeta)^3$, отбрасывая ζ^2 и ζ^3 как малые величины, получим на основании (3.6) приближённую формулу

$$m_1 = m \left[1 - 3 \left(\frac{1-m}{m}\right) \zeta\right], \qquad (15.3)$$

выражающую эффективную пористость через истинную.

Пользуясь методом Слихтера, легко найти изменение закона фильтрации. Очевидно, всё сводится к изменению геометрического (истинного) просвета n в эффективный просвет n_1. Имеем по формуле (3.8)

$$n_1 = 1 - \frac{S_2'}{S_1}, \qquad (15.4)$$

где

$$S_1 = d_1^2 \sin\theta, \quad S_2' = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} d^2 (1+\zeta)^2.$$

Следовательно,

$$n_1 = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \theta} (1 + \zeta)^2,$$

откуда на основании (3.9) получаем приближённо

$$n_1 = n \left[1 - 2 \left(\frac{1-n}{n} \right) \zeta \right]. \qquad (15.5)$$

Вычисляя скорость фильтрации по формуле (5.11), мы получим теперь

$$\overline{w} = w \left[1 - 2 \left(\frac{1-n}{n} \right) \zeta \right]. \qquad (15.6)$$

Таким образом, формулы (15.3) и (15.6) показывают, что существование даже очень тонкой плёнки значительно влияет на величину пористости и скорости фильтрации.

Если принять диаметр шарообразной частицы, равной $d = 0{,}25$ *мм*, а толщину плёнки, равной 0,001 *мм*, то будем иметь

$$\zeta = \frac{0{,}002}{0{,}25} = 0{,}008.$$

Если взять для пористости и просвета их средние значения в интервале $\theta = 60°$ и $\theta = 90°$ (см. § 3), а именно

$$m = 0{,}33; \quad n = 0{,}132,$$

то получим

$$m_1 = 0{,}95m,$$

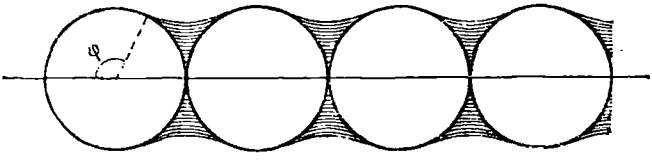
$$\overline{w} = w \left[1 - 2 \left(\frac{1-n}{n} \right) \zeta \right] = 0{,}90w,$$

т. е. пористость уменьшается на 5%, а скорость фильтрации — на 10%.

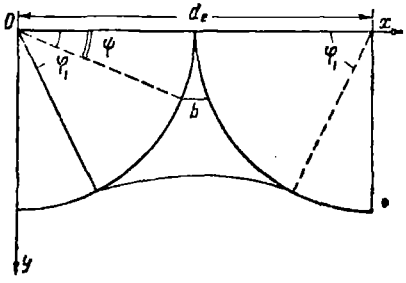
§ 16. Образование областей застойной жидкости около шарообразных частиц грунта.

При обтекании вязкой жидкостью твёрдого тела при некоторых условиях может произойти отрыв обтекающей жидкости от поверхности тела, причём за местом отрыва образуется область застойной жидкости, не участвующей в общем течении. По нашим исследованиям угол отрыва при

ламинарном обтекании шара в неограниченном потоке вязкой жидкости составляет $\varphi = 116{,}2°$. Если предположить, что при обтекании жидкостью шарообразных частиц грунта происходит такой отрыв (фиг. 18), то получатся застойные области, заштрихованные на фигуре. Можно легко вычислить объём такой области вокруг каждой шаровой частицы. Согласно фиг. 19 мы имеем



Фиг. 18.



Фиг. 19.

$$\varphi_1 = 180° - \varphi = 180° - 116{,}2° = 63{,}8°$$

и

$$V_3 \approx 2\pi \int_0^{y_1} yb\, dy, \quad (16.1)$$

где

$$b = d(1 - \cos\psi),$$

$$y = \frac{d}{2}\sin\psi,$$

$$y_1 = \frac{d}{2}\sin\varphi_1.$$

Следовательно, объём застойной области равен

$$V_3 = \frac{\pi d^3}{2}\int_0^{\varphi_1} \sin\psi\,(1 - \cos\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

или

$$V_3 = \frac{\pi d^3}{12}(3\sin^2\varphi_1 + 2\cos^3\varphi_1 - 2). \quad (16.2)$$

Учитывая, что $\varphi_1 = 63{,}8°$, мы получим

$$V_3 = 0{,}0626 d^3 = 0{,}12\frac{\pi d^3}{6}. \quad (16.3)$$

Таким образом, застойные области как бы увеличивают объём каждой шарообразной частицы на $12^0/_0$.

Очевидно, образование областей застойной жидкости изменяет величину пористости. Согласно определению пористости имеем

$$m' = 1 - \frac{V_2 + V_3}{V_1}, \tag{16.4}$$

причём

$$V_2 + V_3 = 1{,}12\,\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi d_2^3}{6},$$

откуда находим

$$d_2 = 1{,}038d.$$

Теперь мы можем воспользоваться выводами предыдущего параграфа, приняв на этот раз, что

$$\zeta = 0{,}038.$$

Следовательно, согласно формуле (15.3) имеем

$$m' = m\left[1 - 0{,}114\left(\frac{1-m}{m}\right)\right]. \tag{16.5}$$

Отсюда для случая наименьшей теоретической пористости

$$m' = 0{,}63m,$$

а для случая наибольшей теоретической пористости —

$$m' = 0{,}87m.$$

§ 17. Формулы, не основанные на законе Дарси.

Для фильтрации в крупнозернистых песках линейная зависимость Дарси (12.1) между скоростью фильтрации и гидравлическим уклоном перестаёт быть верной и должна быть заменена другой, учитывающей турбулентный характер движения жидкости.

В этом случае надо применить самую общую формулу фильтрации (10.4), дающую зависимость между производным числом фильтрации σ и числом Рейнольдса R. В простейшем случае степенной зависимости мы имеем общую формулу (10.6). Внося в неё R по формуле (9.5), получим для скорости

фильтрации уравнение

$$w = \frac{\nu}{\sqrt{k}} \left(\frac{\vartheta_0 j}{B_1} \right)^{\frac{1}{s}}, \tag{17.1}$$

причём $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ есть кинематическая вязкость, $j = \frac{H}{h}$ — безразмерный гидравлический уклон, а величина ϑ_0 равна

$$\vartheta_0 = \frac{gk\sqrt{k}}{\nu^2}, \tag{17.2}$$

где g есть ускорение земного притяжения, следовательно, размерностью ϑ_0 будет нуль.

Частными случаями формулы (17.1) являются:

1) *Формула Смрекера*

$$w = \left(\frac{2g}{\gamma_0} j \right)^{\frac{2}{3}}, \tag{17.3}$$

где γ_0 есть опытный коэффициент.

2) *Формула Кребера* для воды

$$w = 173 \left(\frac{d}{90} j \right)^n, \tag{17.4}$$

выражающая скорость фильтрации в сантиметрах в секунду. В этой формуле d есть средний диаметр частиц грунта в сантиметрах, а показатель n равен

$$n = \frac{0{,}8 + d}{0{,}8 + 2d}. \tag{17.5}$$

Следует заметить, что формула (17.4) применима только для грунта из частиц с диаметром не менее 0,5 *мм*. Очевидно, для частиц очень малого диаметра показатель n будет близок к единице, и тогда формула Кребера переходит в формулу типа Дарси. Наоборот, при больших значениях d показатель n близок к 0,5, и формула Кребера переходит в формулу чисто квадратичной фильтрации

$$w = B_2 \sqrt{dj}, \tag{17.6}$$

где B_2 есть постоянная, определяемая из опыта.

С целью учесть зависимость скорости фильтрации w от пористости m, Замарин предложил ввести в (17.4) множи-

тель m:

$$w = 173m\left(\frac{d}{90}j\right)^n. \tag{17.7}$$

Замарин, сравнивая эту формулу с опытами Крюгера, находит уклонения, главным образом, в одну сторону.

В некоторых случаях выгодно пользоваться формулой (9.6). Пользуясь обозначениями (9.5), (12.2) и (17.2), мы легко найдём

$$Q = \frac{P_2 k\sqrt{k}}{h\mu^2} = \vartheta_0 j, \tag{17.8}$$

откуда получаем

$$j = \frac{1}{\vartheta_0}F(R). \tag{17.9}$$

Если функция F развёртывается в степенной ряд, то мы имеем

$$j = A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3 + \ldots$$

Из этой формулы следует

$$j = C_0 + C_1w + C_2w^2 + C_3w^3 + \ldots \tag{17.10}$$

Формулами этого вида являются для воды:

1) *Формула П. Кресника*, пригодная для чистого песка при 10° Ц:

$$1000j = \frac{w_1}{0{,}7 + w_1}\left[\frac{1}{d} + \frac{w_1}{0{,}8d + 10{,}5d^2} + \frac{w_1^2}{30\,000d^2}\right], \tag{17.11}$$

где w_1 есть скорость фильтрации в метрах в сутки, а d — эффективный диаметр в сантиметрах.

2) *Формула Форхгеймера* (Forchheimer):

$$d = C_1w + C_2w^2 + C_3w^3.$$

Эта формула есть частный случай формулы (17.10) при

$$C_0 = C_4 = C_5 = \ldots = 0.$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 определяются из опыта.

§ 18. Формула Шривера.

Из опытов над фильтрацией нефтепродукта Nujol (удельный вес $\gamma = 0{,}836$ $г/см^3$ при 99° Ц, вязкость при этой же температуре $\mu = 0{,}050$ пуаза) через искусственную однородную пористую среду из стеклянных шариков Шривер

(W. Schriever) вывел эмпирическую формулу

$$w = \frac{4m^{\beta}d^{\beta+1}H}{\mu h}, \tag{18.1}$$

где H есть падение давления, выраженное в сантиметрах водяного столба на толщине пласта h, измеренной в сантиметрах, d — диаметр стеклянных шариков в сантиметрах, μ — вязкость в пуазах, а показатель степени β равен

$$\beta = 4{,}14 - \frac{0{,}0141}{d}. \tag{18.2}$$

Диаметры стеклянных шариков были в сантиметрах:

$$d = 0{,}1025;\ 0{,}0528;\ 0{,}0443;\ 0{,}0252.$$

Пористость в различных опытах была равна

$$m = 0{,}3870;\ 0{,}3777;\ 0{,}3653;\ 0{,}3533.$$

К сожалению, данных, приведённых в статье Шривера, недостаточно для обработки их по рациональной формуле (9.6).

§ 19. Фильтрация через глину.

Глина состоит из крайне малых пластинообразных частиц; её проницаемость значительно меньше, чем проницаемость самого тонкого песка. На основании отчасти теоретических соображений, отчасти экспериментальных данных Терцаги дал следующую формулу для коэффициента фильтрации:

$$K = C_0 \frac{(\varepsilon - 0{,}15)^{3+\lambda}(1+\varepsilon)}{(\varepsilon - 0{,}15)^{\lambda} + \frac{c}{d^{\lambda}}} \frac{d^2}{\mu}, \tag{19.1}$$

где C_0 есть коэффициент, зависящий только от состава грунта, c — величина, зависящая только от диаметра частицы грунта, d — диаметр частиц грунта, μ — абсолютная вязкость, λ — коэффициент, заключённый в интервале $7{,}7 < \lambda < 9{,}0$ (среднее значение $\lambda = 8{,}0$), а ε равно

$$\varepsilon = \frac{m}{1-m}. \tag{19.2}$$

Терцаги произвёл обширные опыты с жёлто-бурой глиной (продукт выветривания известковых сланцев) из Малой Азии. Для этой глины

$$d = 0{,}00006 \text{ см}$$

и коэффициент фильтрации равен [1])

$$K = 3{,}34 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\mu_0}{\mu_t}\right) \frac{(\varepsilon - 0{,}15)^{11}(1+\varepsilon)}{(\varepsilon - 1{,}15)^8 + 0{,}0166} \text{ см/мин.} \quad (19.3)$$

Форхгеймер [2]) даёт эту формулу в ином виде

$$K = \frac{5{,}56 \cdot 10^{-9}(1{,}15m - 0{,}15)^{11}\left(\frac{\mu_0}{\mu_t}\right)}{(1-m)^4[(1{,}15m - 0{,}15)^8 + 0{,}0166(1-m)^8]} \text{ см/сек}, \quad (19.4)$$

где μ_0 — абсолютная вязкость при 0° Ц, μ_t — абсолютная вязкость при t °Ц, m — пористость.

§ 20. Турбулентная фильтрация.

В § 2 нами была выведена общая формула (2.17) для движения в элементарной поровой трубке. При вычислении безразмерной величины Ω_1 по формуле (2.15) мы должны учитывать теорему Слихтера (§ 5), согласно которой надо заменить толщину пласта h через фиктивную толщину h_1, определяемую из формулы (5.20):

$$h_1 = h \frac{6(1-m)}{\pi} \sin\vartheta.$$

Поэтому имеем из (2.15)

$$\Omega_1 = \frac{\pi \rho \delta^3 P}{6(1-m)\sin\vartheta \cdot \mu^2 h}, \quad (20.1)$$

причём сюда надо внести гидравлический радиус δ по формуле (2.7). Этот же гидравлический радиус надо подставить и в число Рейнольдса, определяемое формулой (2.9). Разберём два практически наиболее интересных метода определения скорости фильтрации.

---

[1]) Зауэрбрей И. И., Известия Института гидротехники № 3.
[2]) Forchheimer Ph., Hydraulik, 1930, § 21.

1) *Метод Слихтера.* Если воспользоваться тем приёмом, который был применён Слихтером для ламинарной фильтрации, то надо представить себе элементарную поровую трубку круглого сечения, площадь которого ω равна площади наименьшего возможного сечения порового канала. Эта площадь вычисляется по формуле (5.4):

$$\omega = \frac{nd^2}{2} \sin\theta.$$

Гидравлический радиус такого круглого сечения вычисляется по формуле (2.26):

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}.$$

Внося (5.4) в (2.26), мы получим

$$\delta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{n \sin\theta}{2\pi}}. \tag{20.2}$$

Подставляя (20.2) в (20.1), мы найдём

$$\Omega_1 = A_1 \frac{\rho d^3 P}{h\mu^2}, \tag{20.3}$$

где

$$A_1 = \frac{n^{3/2} \sqrt{\sin\theta}}{96 (1 - m) \sqrt{2\pi}}. \tag{20.4}$$

Для числа Рейнольдса получаем величину

$$\mathrm{R}_1 = \frac{w_0 \rho d \sqrt{n \sin\theta}}{2\mu \sqrt{2\pi}}, \tag{20.5}$$

откуда находим

$$\frac{\rho w_0 d}{\mu} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n \sin\theta}} \mathrm{R}_1. \tag{20.6}$$

Из формулы (2.17) мы имеем

$$\mathrm{R}_1 = f(\Omega_1). \tag{20.7}$$

Внося (20.6) в (20.7) и принимая во внимание формулу Слих-

тера (5.11), мы получим

$$\frac{\rho w d}{\mu} = \frac{2\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}{\sqrt{\sin\theta}} f(\Omega_1), \tag{20.8}$$

где w есть скорость фильтрации.

В случае степенного закона мы имеем

$$f(\Omega_1) = \left(\frac{\Omega}{\beta^2}\right)^s. \tag{20.9}$$

Из (20.8) и (20.9) следует, что

$$\frac{w^2 d}{\mu} = A_2 B_1(m) \left(\frac{\rho d^3 P}{\mu^2 h}\right)^s, \tag{20.10}$$

где

$$A_2 = \frac{2\sqrt{2\pi}}{(96\beta^2\sqrt{2\pi})^s}, \tag{20.11}$$

$$B_1(m) = \frac{n^{\frac{3s+1}{2}}}{(1-m)^s} (\sin\theta)^{\frac{s-1}{2}}. \tag{20.12}$$

При $s = 1$ получаем

$$A_2 = \frac{1}{96}, \quad B_1(m) = \frac{n^2}{1-m}.$$

Следовательно,

$$\frac{w^2 d}{\mu} = \frac{n^2}{96(1-m)} \frac{P\rho d^3}{\mu^2 h},$$

откуда

$$w = \frac{n^2}{96(1-m)} \frac{Pd^3}{\mu h}, \tag{20.13}$$

а это есть формула Слихтера (5.12).

Из (5.15) и (5.24) имеем приближённо

$$m^{-1/4} \sin\theta = \text{const}. \tag{20.14}$$

Внося (20.14), (5.15) и (5.16) в (20.12), получим приближённо

$$B_1(m) = \text{const}.\ m^{2{,}725s + 0{,}575}. \tag{20.15}$$

Обобщая формулу (20.10), имеем

$$R_2 = \sum_a B_a \Omega_1^a, \tag{20.16}$$

что можно представить в виде

$$\mathrm{R}_2 = f(\Omega_2), \tag{20.17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R}_2 &= \frac{w\rho d}{\mu}, \\ \Omega_2 &= \frac{\rho d^3 P}{\mu^2 h}. \end{aligned}\right\} \tag{20.18}$$

Так как проницаемость k можно принять пропорциональной диаметру d, то, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R}_2 &= \text{const. R}, \\ \Omega_2 &= \text{const. } \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{20.19}$$

а, следовательно, соотношение (20.17) совпадает с соотношением (9.14).

2) *Метод Козени.* В случае применения метода Козени к турбулентной фильтрации мы должны внести в (2.15) значение $\hat{c}$ по формуле (6.10) и принять вместо h двойную величину $2h$, что даёт

$$\Omega_1 = \frac{m^3 d^3 \rho P}{432\,(1-m)^3 \mu^2 h}. \tag{20.20}$$

Аналогично будем иметь

$$\mathrm{R}_1 = \frac{\rho w_0 m d}{6\,(1-m)\,\mu}. \tag{20.21}$$

Из (20.21), применяя (20.7) и (2.3), получим

$$\frac{\rho w d}{\mu} = 6\,(1-m)\,f(\Omega_1), \tag{20.22}$$

где w есть скорость фильтрации. В случае степенного закона (20.9) имеем

$$\frac{\rho w d}{\mu} = A_3 B_2(m) \left(\frac{\rho d^3 P}{\mu^2 h}\right)^s, \tag{20.23}$$

где

$$A_3 = \frac{6}{(432\,\beta^2)^s}, \tag{20.24}$$

$$B_2(m) = \frac{m^{3s}}{(1-m)^{3s-1}}. \tag{20.25}$$

В случае $s=1$, имеем (20.23):

$$w=\frac{m^3d^2P}{72\beta^2\mu h\,(1-m)^2},$$

что совпадает с формулой (6.12). Это и есть формула Козени. Внося (5.15) в (20.25), найдём приближённо

$$B_2(m)=\text{const.}\,m^{\frac{9s-1}{2}} \tag{20.26}$$

Соотношение (20.23) также обобщается в соотношение (9.14).

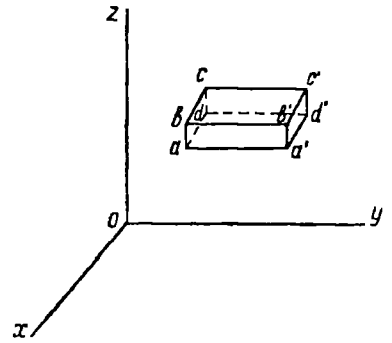
Таким образом, мы приходим к заключению, что и прямое обобщение методов Слихтера и Козени для ламинарной фильтрации на случай турбулентной фильтрации приводит к тому же основному закону фильтрации (9.6), как и метод размерностей, изложенный в § 9.

ГЛАВА II.

УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Уравнение неразрывности при движении сжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде.

Будем относить движение к прямоугольным осям координат $Oxyz$. Проекции скорости фильтрации на эти оси обозначим через u, v, w; они будут функциями от координат x, y, z и времени t. Возьмём элементарный параллелепипед $abcda'b'c'd'$ (фиг. 20), рёбра которого равны dx, dy, dz. Рассмотрим движение жидкости через этот параллелепипед в направлении оси Ox за элемент времени dt. Очевидно, за это время через грань $cdd'c'$ втекает масса жидкости $\rho u dy dz dt$ (ρ — плотность жидкости), а через грань $baa'b'$ вытекает масса



Фиг. 20.

$$\rho u\, dy\, dz\, dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\, dy\, dz\, dt)\, dx,$$

так что масса, накопленная в параллелепипеде за время dt от движения в направлении оси Ox, будет равна

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho u\, dy\, dz\, dt)\, dx = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Аналогичным путём найдём, что массы, накопленные внутри параллелепипеда от движения в направлении осей Oy и Oz за время dt, будут равны соответственно

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Следовательно, полное накопление массы жидкости в параллелепипеде за время dt будет равно

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]dx\,dy\,dz\,dt. \qquad \text{(a)}$$

С другой стороны, это накопление вызывает за время dt изменение массы в рассматриваемом параллелепипеде, равное

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m\ dx\ dy\,dz)\,dt=\frac{\partial}{\partial t}(m\rho)\,dx\,dy\,dz\,dt; \qquad \text{(b)}$$

в самом деле, если m есть пористость среды, то объём пор параллелепипеда, занятый жидкостью, имеет величину

$$m\,dx\,dy\,dz.$$

Сравнивая (a) и (b), мы получаем *уравнение неразрывности для движения в пористой среде*

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)+\frac{\partial}{\partial y}(v\rho)+\frac{\partial}{\partial z}(w\rho)=0. \qquad (1.1)$$

Если пористую среду, в которой движется сжимаемая жидкость, мы примем за *недеформируемую*, то её пористость m будет постоянной величиной. В этом случае уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)+m\frac{\partial \rho}{\partial t}=0. \qquad (1.2)$$

§ 2. Компоненты скорости ламинарной фильтрации.

В главе I мы получили основную формулу (9.1) для скорости ламинарной фильтрации в фиктивном грунте. Обозначим через $\boldsymbol{v}$ вектор скорости ламинарной фильтрации в пористой среде, а через k — проницаемость пористой среды.

Согласно закону Дарси, при отсутствии массовых сил, для ламинарной фильтрации можно записать следующее основное векторное соотношение:

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \tag{2.1}$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, а p — гидродинамическое давление. Из (2.1) мы получаем для компонентов скорости ламинарной фильтрации по осям x, y, z основные формулы

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.2}$$

§ 3. Фиктивные силы сопротивления.

К процессу ламинарной фильтрации сжимаемой жидкости в пористой среде следует применять основные уравнения движения вязкой жидкости Навье-Стокса, ибо при течении жидкости в очень тесных каналах между частицами пористой среды, силы вязкости играют очень важную и, несомненно, преобладающую роль.

Но даже в простейшем случае фиктивного грунта движение жидкости представляет собой обтекание бесчисленного множества шаров, вследствие чего прямое интегрирование уравнений Навье-Стокса при столь сложных граничных условиях, даже если пренебречь инерционными силами, оказывается невозможным. Поэтому прибегают к следующему искусственному приёму: применяют уравнения гидродинамики в форме Эйлера, но к действительно существующим массовым силам с компонентами X, Y, Z прибавляют *фиктивные* массовые силы, которые заменяют эффект вязкости и называются фиктивными силами сопротивления Жуковского. Обозначим компоненты фиктивных сил сопротивления через $-X_0$, $-Y_0$, $-Z_0$. Для их вычисления примем, что движение жидкости происходит равномерно и только вследствие падения гидродинамического давления, при отсутствии массовых сил. В этом случае имеем

$$X = Y = Z = 0. \tag{3.1}$$

Кроме того, будут равны нулю и проекции абсолютного ускорения:

$$j_x^a = j_y^a = j_z^a = 0, \tag{3.2}$$

Поэтому уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - X_0 - j_x^a, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - Y_0 - j_y^a, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - Z_0 - j_z^a, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= -X_0, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= -Y_0, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= -Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Исключая из (2.2) и (3.4) производные

$$\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z},$$

мы получим соотношения

$$X_0 = \frac{\mu u}{k\rho},\quad Y_0 = \frac{\mu v}{k\rho},\quad Z_0 = \frac{\mu w}{k\rho} \tag{3.5}$$

Введём теперь следующую фундаментальную гипотезу: *соотношения* (3.5) *дают компоненты фиктивных сил сопротивления при любом случае ламинарной фильтрации* (гипотеза Н. Е. Жуковского).

§ 4. Основное уравнение ламинарной фильтрации сжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде.

При исследовании ламинарной фильтрации обычно пренебрегают инерционными членами, т. е. принимают, что

$$\left.\begin{aligned} j_x^a &= \frac{Du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = 0, \\ j_y^a &= \frac{Dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w = 0, \\ j_z^a &= \frac{Dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

и вносят, согласно высказанной в конце предыдущего параграфа гипотезе, в уравнения (3.3) выражения (3.5) фиктивных сил сопротивления. Тогда вместо (3.3) будем иметь следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\mu u}{k\rho}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\mu v}{k\rho}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\mu w}{k\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности (1.2) дают полную систему уравнений, достаточную для определения величин

$$u,\ v,\ w,\ p$$

при заданных начальных и граничных условиях, при условии, что известна функция

$$\rho = f(p, T), \tag{4.3}$$

связывающая плотность ρ с давлением p и абсолютной температурой T, а также величины k и μ.

Из (4.2) имеем

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k\rho}{\mu}\left(X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \\ v &= \frac{k\rho}{\mu}\left(Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right), \\ w &= \frac{k\rho}{\mu}\left(Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Внося (4.4) в (1.2), мы получим *основное и самое общее уравнение ламинарной фильтрации в неизменяемой пористой среде*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}Y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}Z\right). \tag{4.5}$$

Если рассматриваемая сжимаемая жидкость находится в поле земного притяжения, то, направив ось Oz вертикально вверх, будем иметь

$$X = Y = 0, \quad Z = -g. \tag{4.6}$$

Внося (4.6) в (4.5), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)= =m\frac{\partial\rho}{\partial t}-g\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}\right), \quad (4.7)$$

причём вследствие (4.3) мы здесь имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.8)$$

где производная $\frac{d\rho}{dp}$ есть известная функция давления p. Если k и μ суть постоянные величины или если их отношение есть величина постоянная, то из (4.7) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)= =\frac{d\rho}{dp}\left(\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}-2g\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right). \quad (4.9)$$

Уравнение (4.7) было впервые дано в нашей работе «Движение газа в пористой среде» [1]).

Из него получаются как частные случаи

1) Уравнения фильтрации тяжёлой несжимаемой жидкости (вода).

2) Уравнения фильтрации газа.

3) Уравнения фильтрации тяжёлой слабо сжимаемой жидкости.

§ 5. Уравнения движения тяжёлой несжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде.

В случае тяжёлой несжимаемой жидкости её плотность ρ есть величина постоянная, а единственно возможная сила есть земное притяжение. Поэтому, направляя ось z по вертикали вверх, получаем из (4.5) и (4.6):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0, \quad (5.1)$$

---

[1]) «Нефтяное хозяйство» № 8—9, 1929 и № 10, 1930. См. также Лейбензон Л. С.: Нефтепромысловая механика, часть вторая. Москва, 1934, стр. 56.

ибо

$$\mu = \text{const.}, \quad \rho = \text{const.}$$

Внося (4.6) в (4.4), получим

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{kg\rho}{\mu} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{5.2}$$

Введём теперь новую функцию, так называемый *напор*

$$\varphi = \frac{h}{g\rho} + z. \tag{5.3}$$

Тогда уравнения (5.2) можно будет представить в виде

$$u = -\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{5.4}$$

Внося (5.3) в (5.1), мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial k}{\partial z} = 0. \tag{5.5}$$

Если проницаемость k постоянна, то из (5.1) и (5.5) имеем

$$\nabla^2 p = 0, \tag{5.6}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{5.7}$$

где введено обозначение

$$\nabla^2_1(\ ) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ ) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ ) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\ ). \tag{5.8}$$

Поверхность

$$\varphi = \text{const.} \tag{5.9}$$

называется *поверхностью напора.*

Из уравнений (5.4) следует, что частицы жидкости будут двигаться по линиям тока, ортогональным к поверхности напора.

Из (5.6) и (5.7) следует, что обе функции

$$p(x, y, z, t), \quad \varphi(x, y, z, t)$$

суть гармонические, определяемые граничными и начальными условиями.

§ 6. Уравнения движения газа в неизменяемой пористой среде.

Плотность газа ρ есть функция давления p, определяемая характеристическим уравнением (4.3). Поэтому удобно ввести новую функцию давления

$$q = q(p) = \int \rho\, dp. \tag{6.1}$$

Обратно, из (6.1) мы имеем

$$p = f_1(q), \tag{6.2}$$

следовательно, согласно (4.3) будет

$$\rho = f_2(q). \tag{6.3}$$

Из (6.1) следует

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial q}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z}, \end{aligned}\right\}, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dq}\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{6.5}$$

Внося (6.4) и (6.5) в (4.5), мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial z}\right) = m\frac{d\rho}{dq}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}Y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\rho^2}{\mu}Z\right). \tag{6.6}$$

Здесь в правой части ρ и $\frac{d\rho}{dq}$ суть известные функции q.

Так как для газа массовыми силами обычно пренебрегают, т. е. полагают

$$X = Y = Z = 0 \tag{6.7}$$

и так как вязкость газа можно считать за постоянную величину, то из уравнения (6.6) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial q}{\partial z}\right) = m\mu\frac{d\rho}{dq}\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Наконец, если принять в первом приближении

$$k = \text{const.}, \tag{6.9}$$

то из уравнения (6.8) получаем

$$\nabla^2 q = \left(\frac{m\mu}{k}\frac{d\rho}{dq}\right)\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{6.10}$$

Это уравнение является основным дифференциальным уравнением задачи о течении газа в неизменяемой пористой среде с постоянной проницаемостью. Относительно неизвестного $q(x, y, z, t)$ оно является уравнением с частными производными второго порядка параболического типа и аналогично уравнению теплопроводности. Оно даёт решение задачи о движении газа в неизменяемой пористой среде с постоянной проницаемостью, если заданы граничные и начальные условия.

В частном случае политропического процесса, определяемого уравнением

$$p^{1/n} = \beta\rho, \tag{6.11}$$

где n есть показатель политропы, а β — газовая постоянная, будем иметь

$$q = \frac{n}{\beta(n+1)}p^{\frac{n+1}{n}}, \tag{6.12}$$

$$\rho = \frac{1}{\beta}\left[\frac{q\beta(n+1)}{n}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{6.13}$$

$$\frac{d\rho}{dq} = \frac{1}{n}\left[\frac{\beta(n+1)q}{n}\right]^{-\frac{n}{n+1}}. \tag{6.14}$$

Внося (6.14) в (6.10), мы получим

$$\nabla^2 q = \varepsilon q^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial q}{\partial t}, \tag{6.15}$$

где

$$\varepsilon = \frac{m\mu}{nk}\left[\frac{n}{\beta(n+1)}\right]^{\frac{n}{n+1}}. \tag{6.16}$$

В частном случае изотермического процесса изменения состояния газа при движении его в неизменяемой пористой

среде постоянной проницаемости мы должны принять

$$n = 1,$$

что отвечает уравнению Бойля-Мариотта

$$p = \beta\rho. \tag{6.17}$$

В этом случае мы имеем

$$q = \frac{1}{2\beta} p^2, \tag{6.18}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{\beta} q}, \tag{6.19}$$

и уравнение (6.10) принимает вид

$$\nabla^2 q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{6.20}$$

где

$$\varepsilon = \frac{m\mu}{k\sqrt{2\beta}}. \tag{6.21}$$

§ 7. Уравнения движения малосжимаемой тяжёлой жидкости в неизменяемой пористой среде.

Пусть ρ_0 есть плотность жидкости при давлении p_0. Если изменение давления $p - p_0$ невелико, то изменение плотности $\rho - \rho_0$ будет тоже незначительным, так как жидкость малосжимаема. Поэтому с достаточной точностью мы можем написать

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho_0}{\alpha}(p - p_0), \tag{7.1}$$

где постоянная α есть модуль объёмной упругости жидкости. Дифференцируя в (7.1) ρ по p, мы получим

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho_0}{\alpha}. \tag{7.2}$$

Но так как ρ есть одновременно и функция x, y, z, то мы будем иметь

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{7.3}$$

Внося (7.3) в (4.9), мы получим

$$\frac{d\rho}{dp}\Delta_1 p + \rho\nabla^2 p = \frac{d\rho}{dp}\left[\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} - 2g\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right], \tag{7.4}$$

где введено обозначение

$$\Delta_1 p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2. \tag{7.5}$$

В уравнении (7.4) мы приближённо положим

$$\rho = \rho_0.$$

В таком случае из (7.2) следует

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{a},$$

что после подстановки в (7.4) даёт

$$\frac{1}{a}\Delta_1 p + \nabla^2 p = \frac{1}{a}\left[\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} - 2g\rho_0\frac{\partial p}{\partial z}\right]. \tag{7.6}$$

Так как a есть величина большая, то первым членом в левой части этого уравнения можно пренебречь, и мы получим

$$\nabla^2 p = \frac{1}{a}\left[\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} - 2g\rho_0\frac{\partial p}{\partial z}\right]. \tag{7.7}$$

Это есть уравнение фильтрации малосжимаемой тяжёлой жидкости в неизменяемой пористой среде.

Если силой тяжести пренебречь, то мы получим упрощённое уравнение так называемого упругого режима фильтрации:

$$\nabla^2 p = \left(\frac{m\mu}{ka}\right)\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{7.8}$$

которое совпадает с уравнением теории теплопроводности и, следовательно, позволяет по заданным начальным и граничным условиям решить задачу об упругом режиме фильтрации.

§ 8. Уравнение неразрывности при движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде.

Если пористая среда деформируется с изменением давления, то её пористость m будет функцией этого давления. Но изменение пористости может происходить только за счёт изменения объёма порового пространства, так как частицы горной по-

объёма порового пространства, так как частицы горной породы, из которых слагается пористая среда, сами по себе практически неизменяемы и могут только перемещаться относительно друг друга.

Простейшая гипотеза состоит в предположении, что изменение пористости пропорционально приросту давления:

$$dm = \frac{dp}{\alpha_1}, \tag{8.1}$$

где α_1 есть некоторый модуль, характеризующий пористую среду.

В случае деформируемой пористой среды уравнение (1.1) главы II может быть написано в виде

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial m}{\partial t} = 0. \tag{8.2}$$

Внося сюда из (8.1)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{8.3}$$

и

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{8.4}$$

мы получим уравнение

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \left(m\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{\alpha_1}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{8.5}$$

В случае мало сжимаемой жидкости мы имеем из уравнения (7.1):

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho_0}{a}, \tag{8.6}$$

$$\frac{\rho}{\alpha_1} = \frac{\rho_0}{\alpha_1}. \tag{8.7}$$

Внося (8.6) и (8.7) в уравнение (8.5), мы получим окончательно уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{m\rho_0}{a}\left(1 + \frac{a}{m\alpha_1}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{8.8}$$

впервые выведенное В. Н. Щелкачёвым. Следовательно, для получения из уравнения (7.7) уравнения движения малосжимаемой тяжёлой жидкости в деформируемой пористой среде

надо умножить $\frac{\partial p}{\partial t}$ на множитель

$$1+\frac{\alpha}{m\alpha_1},$$

что даёт

$$\nabla^2 p=\frac{m\mu}{k\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{m\alpha_1}\right)\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{2gp_0}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (8.9)$$

Если эффектом тяжести пренебречь, то мы получим более простое уравнение

$$\nabla^2 p=\frac{m\mu}{k\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{m\alpha_1}\right)\frac{\partial p}{\partial t},$$

впервые выведенное тоже В. Н. Щелкачёвым и совпадающее с известным уравнением теплопроводности.

ГЛАВА III.

УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Компоненты скорости турбулентной фильтрации.

В § 9 главы I мы вывели основные формулы (9.14) и (9.6) теории фильтрации

$$\mathsf{R} = f(\mathsf{Q}), \tag{1.1}$$

$$\mathsf{Q} = F(\mathsf{R}), \tag{1.2}$$

причём, согласно формуле (9.5) главы I,

$$\mathsf{R} = \frac{wp\sqrt{k}}{\mu}, \tag{1.3}$$

$$\mathsf{Q} = \frac{\rho k^{3/2} P}{\mu^2 h}. \tag{1.4}$$

Обозначим через v абсолютное значение скорости турбулентной фильтрации в пористой среде; пусть направление скорости фильтрации определяется вектором $\boldsymbol{h}$. Перепад гидродинамического давления на элементе длины dh будет

$$P = dp.$$

Поэтому из уравнения (1.4) имеем

$$\mathsf{Q} = D\frac{dq}{dh}, \tag{1.5}$$

где

$$D = \frac{k^{3/2}}{\mu^2}, \tag{1.6}$$

а вместо p подставлена функция давления q, определяемая

формулой (6.1) главы II:

$$q = \int \rho \, dp. \tag{1.7}$$

Скорость турбулентной фильтрации в направлении h будет определяться формулой (1.1), в которой Q надо заменить его значением (1.5).

В общем случае турбулентной фильтрации в трёх измерениях скорость V будет определяться векторным уравнением

$$\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu} V = \theta \operatorname{grad} q, \tag{1.8}$$

где

$$\theta(p) = \frac{f(D\sqrt{\Delta_1 q})}{\sqrt{\Delta_1 q}}, \tag{1.9}$$

а

$$\Delta_1 q = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2. \tag{1.10}$$

Составляющие u, v, w скорости турбулентной фильтрации по прямоугольным осям x, y, z определяются из соотношений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho\sqrt{k}\,u}{\mu} &= \theta \frac{\partial q}{\partial x}, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,v}{\mu} &= \theta \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,w}{\mu} &= \theta \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Эти формулы были впервые даны нами в работе «Основной закон движения газа в пористой среде» [1]).

Если обе части уравнения (2.1) главы II умножить на отношение

$$\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu},$$

то, вследствие обозначений (1.6) и (1.7), мы получим

$$\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu} V = D \operatorname{grad} q, \tag{1.12}$$

[1]) «Доклады Академии наук СССР», 1945 г., том XLVII, № 1.

и легко видеть, что уравнение (1.8) является естественным обобщением уравнения (1.12). Последнее получается как частный случай из уравнения (1.8), если в (1.9) положить

$$f(D\sqrt{\Delta_1 q}) = D\sqrt{\Delta_1 q}.$$

§ 2. Введение фиктивных сил сопротивления.

Введём, как это было уже сделано в § 3 главы II, фиктивные силы сопротивления

$$-X_0,\ -Y_0,\ -Z_0. \tag{2.1}$$

Отбрасывая инерционные члены в эйлеровых уравнениях гидродинамики, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - X &= -X_0, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - Y &= -Y_0, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - Z &= -Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Систему уравнений (2.2) мы можем рассматривать как уравнения турбулентной фильтрации, если, как предложил Н. Е. Жуковский, внести для фиктивных сил сопротивления (2.1) те их значения, которые они имеют при отсутствии массовых сил, т. е.

$$X = Y = Z = 0. \tag{2.3}$$

В самом деле, подставляя (2.3) в (2.2) и имея в виду равенство (6.4) главы II, мы получим

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\rho^2 X_0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\rho^2 Y_0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = -\rho^2 Z_0. \tag{2.4}$$

Исключая из (1.11) и (2.4) $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$, мы определим фиктивные силы сопротивления

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho\sqrt{k}\,u}{\mu\theta} &= -\rho^2 X_0, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,v}{\mu\theta} &= -\rho^2 Y_0, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,w}{\mu\theta} &= -\rho^2 Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Умножая обе части уравнений (2.2) на ρ, мы вследствие равенств (6.4) главы II получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} - \rho^2 X &= -\rho^2 X_0, \\ \frac{\partial q}{\partial y} - \rho^2 Y &= -\rho^2 Y_0, \\ \frac{\partial q}{\partial z} - \rho^2 Z &= -\rho^2 Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Исключая из (2.5) и (2.6) X_0, Y_0, Z_0, мы получим искомые составляющие скорости турбулентной фильтрации:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\mu}\rho u &= \theta\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \rho^2 X\right), \\ \frac{\sqrt{k}}{\mu}\rho v &= \theta\left(\frac{\partial q}{\partial y} - \rho^2 Y\right), \\ \frac{\sqrt{k}}{\mu}\rho w &= \theta\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \rho^2 Z\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Они могут быть представлены в виде одного векторного равенства

$$\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu}\boldsymbol{V} = \theta(\operatorname{grad} q - \rho^2 \boldsymbol{R}), \tag{2.8}$$

где θ определяется формулой (1.9), а

$$|R| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{2.9}$$

§ 3. Основное уравнение турбулентной фильтрации сжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде.

Плотность ρ сжимаемой жидкости определяется уравнением (4.3) главы II, а уравнение неразрывности (1.2) главы II имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Мы должны внести в это уравнение значения ρu, ρv, ρw из равенств (2.7), что даёт

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \rho^2 X\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\left(\frac{\partial q}{\partial y} - \rho^2 Y\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \rho^2 Z\right)\right] + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.1}$$

Если действующие силы имеют силовую функцию, т. е.

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU, \tag{3.2}$$

то мы можем ввести обозначение

$$Q = q - \int \rho^2 dU. \tag{3.3}$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.4}$$

В случае отсутствия массовых сил, т. е. при условии (2.3), мы получим из уравнения (3.1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta\frac{\partial q}{\partial z}\right) + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.5}$$

§ 4. Турбулентное движение несжимаемой жидкости.

В этом случае плотность жидкости ρ есть величина постоянная. Поэтому вместо равенства (1.7) имеем

$$q = \rho p. \tag{4.1}$$

Внося (4.1) в (1.10), мы получим

$$\Delta_1 q = \rho^2 \Delta_1 p. \tag{4.2}$$

Уравнения (1.11) примут теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho\sqrt{k}\,u}{\mu} &= \theta_1\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,v}{\mu} &= \theta_1\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\rho\sqrt{k}\,w}{\mu} &= \theta_1\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где

$$\theta_1 = \frac{f(\rho D\sqrt{\Delta_1 p})}{\sqrt{\Delta_1 p}}. \tag{4.4}$$

Уравнение неразрывности (1.2) главы II для случая неизменяемой пористой среды имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4.5}$$

Внося сюда u, v, w из равенств (4.3), мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta_1\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta_1\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\sqrt{k}}\theta_1\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0. \tag{4.6}$$

Это есть основное уравнение турбулентного движения несжимаемой жидкости в пористой среде. Обычно величины μ и k считаются постоянными и уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_1\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\theta_1\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\theta_1\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0. \tag{4.7}$$

В этом случае множитель ρD в равенстве (4.4) есть величина постоянная, и мы можем принять

$$\theta_1=\varphi(\Delta_1 p), \tag{4.8}$$

где вид функции φ известен.

Следует отметить, что в 1940 г. было опубликовано (журнал «Прикладная математика и механика») весьма ценное исследование академика С. А. Христиановича, посвящённое проблеме движения жидкости в пористой среде при нелинейном законе фильтрации.

§ 5. Турбулентное движение газа в пористой среде при политропном процессе.

Уравнение состояния газа определяется формулой (6.11) главы II. Поэтому имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{d\rho}{dq}\frac{\partial q}{\partial t}, \tag{5.1}$$

причём производная $\frac{d\rho}{dq}$ должна быть взята по формуле (6.14) главы II. Подставляя (5.1) в (3.1), (3.4) и (3.5), получим искомое уравнение движения.

§ 6. Турбулентное движение малосжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде.

В этом случае имеет место уравнение неразрывности В. Н. Щелкачёва (8.8) главы II, причём значения ρu, ρv, ρw должны быть взяты из уравнения (1.11). Но так как значение плотности ρ для малосжимаемой жидкости можно принять постоянным, то вместо уравнений (1.11) можно воспользоваться уравнениями (4.3).

ГЛАВА IV.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Основные определения.

Жидкость, в которой растворён газ, называется живой жидкостью, в отличие от мёртвой жидкости, вовсе лишённой газа. Примером первого рода жидкости служит природная нефть, примером второго рода жидкости служит артезианская вода[1]). Если в жидкость нагнетается газ при данной температуре и данном давлении, то в каждой единице объёма жидкости растворяется лишь определённый объём газа, который в первом приближении мы можем считать пропорциональным избыточному давлению (закон Генри). Относительно состояния природной жидкости и природного газа в пористом пласте мы сделаем следующую гипотезу:

Природный газ частью растворён в жидкости (нефть), а частью находится в жидкости в состоянии мельчайших газовых пузырьков, размеры которых, по мере падения давления, всё время растут, но остаются вообще настолько малы, что эти пузырьки свободно проходят через поровые каналы между частицами, из которых построена пористая среда.

Таким образом, мы предполагаем, что в пористой среде находится смесь жидкости, в которой растворён газ (*жидкая фаза*), и свободного газа в виде мельчайших газовых пузырьков, свободно двигающихся в порах (*газовая фаза*).

Очевидно, в области пористого пласта, удалённой от скважины, встречается наименьшее количество газовых пузырьков,

---

[1]) Строго говоря, и в артезианских водах встречаются растворённые газы, но обычно в небольшом количестве.

но по мере того, как с приближением к скважине давление в пласте падает, часть растворённого газа выделяется из жидкости в виде мельчайших пузырьков. Поэтому при приближении к скважине величина жидкой фазы уменьшается, а величина газовой фазы возрастает.

Количество жидкости в единице объёма порового пространства называется *насыщенностью*. Обозначим её через σ. Очевидно, содержание газа в единице объёма порового пространства будет $1-\sigma$. Насыщенность есть относительное содержание жидкости в единице объёма смеси свободного газа и жидкости.

Если m есть пористость, то объём порового пространства в единице объёма пористой среды равен m, следовательно, количество жидкости в единице объёма пористого пласта будет равно $m\sigma$. Количество свободного газа в единице объёма пористой среды будет $m(1-\sigma)$.

§ 2. Совместное движение жидкости и газа в пористой среде (с одинаковыми скоростями).

Итак, мы предполагаем, что газ частью растворён в жидкости, частью находится в ней в виде мельчайших пузырьков, размеры которых малы по сравнению с размерами пор. Так как частицы жидкости и газа движутся с одинаковыми скоростями, то масса какого-нибудь весьма малого объёма V смеси жидкости и газа будет состоять из двух частей:

1) *жидкой фазы* (жидкость с растворённым в ней газом) с объёмом V_0, плотностью q_0 и массой m_0 при давлении p_0;

2) *газовой фазы* (газ в виде пузырьков) с объёмом V_1 при том же давлении p_0 и массой $V_1\rho_0$, где ρ_0 есть плотность газа при давлении p_0.

Полная масса смеси будет равна

$$m = m_0 + V_1\rho_0. \qquad (2.1)$$

Если давление смеси понизится, то из жидкой фазы выделится часть растворённого в ней газа. Масса жидкости сделается равной m_1, а объём V_0'. Одновременно произойдёт увеличение объёма газовой фазы на некоторую величину V_2, и масса газовой фазы сделается равной $(V_1+V_2)\rho$, где ρ есть плотность газа при давлении p. Новый объём смеси, очевидно,

будет равен

$$V' = V_0' + V_1 + V_2, \tag{2.2}$$

но масса смеси останется прежняя:

$$m = m_1 + (V_1 + V_2)\rho. \tag{2.3}$$

Из уравнений (2.1) и (2.3) следует:

$$V_2 = \frac{m_0 - m_1}{\rho} + V_1 \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}. \tag{2.4}$$

Выделение массы газа $m_0 - m_1$ из раствора, занимавшего объём V_0, происходит вследствие падения давления на величину $p_0 - p$. Поэтому мы можем принять

$$m_0 - m_1 = cV_0(p_0 - p), \tag{2.5}$$

где c есть постоянная величина. Если принять, что изменение состояния газа происходит изотермически, то мы можем принять

$$p = \beta\rho, \tag{2.6}$$

где β есть постоянная величина. Внося (2.5) и (2.6) в (2.4), получим

$$V_2 = (V_1 + \beta cV_0)\frac{p_0 - p}{p}. \tag{2.7}$$

Изменение объёма жидкой фазы

$$\Delta V_0 = V_0' - V_0, \tag{2.8}$$

возникающее при падении давления на величину $p_0 - p$, объясняется двумя причинами:

1) изменением объёма раствора вследствие выделения из него растворённого газа; это изменение мы можем принять равным

$$\Delta' V_0 = -\alpha_1 V_0(p_0 - p), \tag{2.9}$$

где α_1 есть постоянная величина;

2) изменением объёма раствора вследствие сжимаемости газа; это изменение равно

$$\Delta'' V_0 = \alpha_2 V_0(p_0 - p), \tag{2.10}$$

где α_2 есть постоянная величина. Полное изменение объёма равно

$$\Delta V_0 = \Delta' V_0 + \Delta'' V_0 = (\alpha_2 - \alpha_1)(p_0 - p) V_0,$$

что после подстановки в (2.8) даёт

$$V_0' = V_0[1 + \alpha(p_0 - p)], \tag{2.11}$$

где введено обозначение

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}.$$

Внося (2.7) и (2.11) в (2.2), мы найдём новый объём V' смеси, получающийся после падения давления смеси на величину $p_0 - p$:

$$V' = V_0[1 + \alpha(p_0 - p)] + V_1 + (V_1 + \beta c V_0)\frac{p_0 - p}{p}. \tag{2.12}$$

Введя обозначения

$$\frac{V_1}{V_0} = \xi, \tag{2.13}$$

$$\alpha p = \eta, \tag{2.14}$$

мы получим из (2.12):

$$V' = V_0\left[1 + \xi + (\beta c + \xi + \eta)\frac{p_0 - p}{p}\right]. \tag{2.15}$$

Обозначим плотность смеси обоих компонентов при давлении p_0 через γ_0, а при давлении p — через γ. Тогда имеем соотношение

$$m = \gamma_0 V = \gamma V', \tag{2.16}$$

что даёт

$$\gamma = \frac{m}{V'}. \tag{2.17}$$

Внося сюда V' из (2.15) и имея в виду, что по определению

$$\frac{m}{V_0(1+\xi)} = \frac{m}{V_0 + V_1} = \frac{m}{V} = \gamma_0,$$

мы получим

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \vartheta\frac{p_0 - p}{p}}, \tag{2.18}$$

где

$$\vartheta = \frac{\beta c + \xi + \eta}{1 + \xi}. \tag{2.19}$$

В равенстве (2.19) η есть, согласно (2.14), величина переменная, но для упрощения вычислений мы примем её за постоянную величину, давая p некоторое среднее значение. Это мы тем более можем сделать, что коэффициент α есть малая величина, которая вообще не может быть определена точно.

Равенство (2.18) является *характеристическим уравнением* для газа, движущегося вместе с жидкостью в пористой среде. Величина ϑ в этом равенстве принимается за постоянную. В случае политропического процесса изменение состояния газа в пористой среде определяется уравнением (6.11) главы II, и характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\alpha}{1+\xi}(p_0 - p) + \frac{\beta c}{1+\xi}(p_0 - p)p^{-1/n} + \frac{\xi}{1+\xi}\frac{p_0^{1/n} - p^{1/n}}{p^{1/n}}}. \tag{2.20}$$

Легко видеть, что при $n = 1$ уравнение (2.20) переходит в уравнение (2.18).

§ 3. Определение насыщенности подвижного элемента.

Согласно определению понятия насыщенности, данному в § 1, мы получим для насыщенности нашего подвижного элемента выражение

$$\sigma = \frac{V_0'}{V'}, \tag{3.1}$$

где V_0' определяется по формуле (2.11), а V' — по формуле (2.15). Ввиду малости α, мы можем приближённо принять, что

$$\left.\begin{aligned} V'_0 &= V_0, \\ V' &= V_0(1+\xi)\left(1 + \vartheta\frac{p_0 - p}{p}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Внося (3.2) в (3.1), мы получим

$$\sigma = \frac{1}{(1+\xi)\left(1 + \vartheta\frac{p_0 - p}{p}\right)}. \tag{3.3}$$

Если начальную насыщенность при давлении p_0 обозначим через σ_0, то из (3.3) имеем

$$\sigma_0 = \frac{1}{1+\xi}. \tag{3.4}$$

Внося (3.4) в (3.3), мы получим окончательно

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{1+\vartheta\frac{p_0-p}{p}}. \tag{3.5}$$

Определяя отсюда $\frac{p}{p_0}$, найдём:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\vartheta\frac{\sigma}{\sigma_0}}{1-(1-\vartheta)\frac{\sigma}{\sigma_0}}. \tag{3.6}$$

Формула (3.5) позволяет вычислить насыщенность подвижного элемента, масса которого остаётся постоянной, но объём возрастает. При этом жидкая фаза элемента практически не меняется, между тем как газовая фаза увеличивается, так как с падением давления увеличивается объём газовых пузырьков и выделяется из раствора газ.

§ 4. Уравнения ламинарного совместного движения жидкости и газа в неизменяемой пористой среде.

Так как жидкость вместе с газом движутся совместно, т. е. с одинаковыми скоростями, то мы можем рассматривать это движение в пористой среде как движение фиктивной однородной жидкости некоторой плотности γ, определяемой при помощи характеристического уравнения (2.18). Поэтому в рассматриваемой теории характеристическое уравнение (2.18) играет основную роль.

Мы будем рассматривать пористую среду как неизменяемую, а движущуюся смесь, так называемую *газированную жидкость*, как упругую жидкость, плотность которой γ есть определённая функция гидродинамического давления p и вычисляется по формуле (2.18).

Так как движение нашей фиктивной жидкости предполагается ламинарным, то компоненты скорости фильтрации опре-

деляются по формулам (2.2) главы II. Поэтому имеем

$$\left.\begin{aligned} \gamma u &= -\frac{k}{\mu}\gamma\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \gamma v &= -\frac{k}{\mu}\gamma\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \gamma w &= -\frac{k}{\mu}\gamma\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

причём здесь величина $\frac{k}{\mu}$ относится к смеси.

Компоненты фиктивных сил сопротивления определяются формулами (3.5) главы II с заменой ρ через γ:

$$X_0=\frac{\mu u}{k\gamma}, \quad Y_0=\frac{\mu v}{k\gamma}, \quad Z_0=\frac{\mu w}{k\gamma}. \tag{4.2}$$

При движении газированной жидкости в поле сил (X, Y, Z) компоненты скорости ламинарной фильтрации определяются формулами (4.4) главы II с заменой ρ через γ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k\gamma}{\mu}\left(X-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \\ v &= \frac{k\gamma}{\mu}\left(Y-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}\right), \\ w &= \frac{k\gamma}{\mu}\left(Z-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Уравнение неразрывности при движении в неизменяемой пористой среде получим из уравнения (1.2) главы II, заменяя ρ через γ:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma u)+\frac{\partial}{\partial y}(\gamma v)+\frac{\partial}{\partial z}(\gamma w)+m\frac{\partial\gamma}{\partial t}=0. \tag{4.4}$$

Внося (4.3) в (4.4), мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial\bar{q}}{\partial z}\right)= \\ &\quad=m\frac{d\gamma}{d\bar{q}}\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\gamma^2}{\mu}X\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\gamma^2}{\mu}Y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\gamma^2}{\mu}Z\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где введено обозначение

$$\bar{q}=\int\gamma\,dp. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.5) есть основное уравнение для решения задач о движении газированной жидкости в неизменяемой пористой среде при заданных начальных и граничных условиях.

При движении в поле тяжести имеем, направляя ось Oz вертикально вверх,

$$X=Y=0, \quad Z=-g. \tag{4.7}$$

Полагая отношение $\frac{k}{\mu}$ постоянным и внося (4.7) в (4.5), мы получим

$$\nabla^2\bar{q}=\frac{d\gamma}{dp}\left(\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}-2g\gamma\frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{4.8}$$

Это уравнение, решающее задачу о движении тяжёлой газированной жидкости в неизменяемой пористой среде, было дано нами в 1934 г. [1]).

Подставляя γ из (2.18) в (4.6), мы получим

$$\bar{q}(p)=\frac{\gamma_0 p_0}{(1-\vartheta)^2}\Psi(p), \tag{4.9}$$

где введено обозначение

$$\psi(p)=\frac{p}{p_0}+\vartheta\left(1-\frac{p}{p_0}\right)-\vartheta\ln\left[\frac{p}{p_0}+\vartheta\left(1-\frac{p}{p_0}\right)\right]+\text{const}. \tag{4.10}$$

Пренебрегая эффектом тяжести, мы имеем из уравнения (4.8)

$$\nabla^2\bar{q}=\frac{m\mu}{k}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{m\mu}{k}\frac{d\gamma}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4.11}$$

Дифференцируя (4.6) и (2.18) по t, мы получим

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}=\frac{d\bar{q}}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}=\gamma\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\vartheta p_0\gamma_0}{[p+\vartheta(p_0-p)]^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4.13}$$

Исключая $\frac{\partial p}{\partial t}$ из (4.12) и (4.13), будем иметь

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=M(p)\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}, \tag{4.14}$$

---

[1]) Лейбензон Л. С.: Нефтепромысловая механика, часть вторая. Москва 1934, стр. 253.

где введено обозначение

$$M(p)=\frac{\vartheta p_0}{p[p+\vartheta(p_0-p)]}. \tag{4.15}$$

Внося (4.14) в (4.11), мы получим уравнение

$$\nabla^2\bar{q}=\frac{m\mu}{k}M(p)\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}. \tag{4.16}$$

Из уравнения (4.9) мы имеем p как некоторую функцию от $\bar{q}$:

$$p=f(\bar{q}).$$

Введём обозначение

$$U=\frac{p}{p_0}+\vartheta\left(1-\frac{p}{p_0}\right), \tag{4.17}$$

тогда из (4.10) мы получим

$$\psi=U-\vartheta\ln U, \tag{4.18}$$

а из (4.9) найдём

$$\psi=\frac{(1-\vartheta)^2}{\gamma_0 p_0}\bar{q}. \tag{4.19}$$

Из (4.18) разложением в ряд мы получаем

$$U=\psi+\vartheta\ln\psi+\vartheta^2\frac{\ln\psi}{\psi}+\frac{\vartheta^3}{2}\frac{\ln\psi^2-(\ln\psi)^2}{\psi^2}+\ldots \tag{4.20}$$

Рассматривая уравнение (4.18) в системе координат U, ψ, мы сумеем решить его графически.

Полагая

$$M(p)=M_1(\bar{q}) \tag{4.21}$$

и внося (4.21) в (4.16), мы получим окончательно

$$\nabla^2\bar{q}=\frac{m\mu}{k}M_1(\bar{q})\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}. \tag{4.22}$$

В это уравнение входит одна неизвестная функция $\bar{q}$, которая может быть определена, если даны начальные и граничные условия.

Таким образом, сделанные нами допущения о свойстве смеси жидкости и газа (введение понятия газированной жидкости) приводят к существенному упрощению математического исследования проблемы движения смеси жидкости и газа и позволяют получить её аналитическое решение.

§ 5. Частный случай установившегося совместного движения жидкости и газа.

В случае установившегося движения уравнение (4.22) принимает вид

$$\nabla^2 \bar{q} = 0, \tag{5.1}$$

причём компоненты скорости ламинарной фильтрации определяются из формул (4.1) после замены в них p через $\bar{q}$ на основании равенства (4.6):

$$\left.\begin{aligned} \gamma u &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \\ \gamma v &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \\ \gamma w &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Уравнение (5.1) есть хорошо известное уравнение Лапласа, метод решения которого при заданных граничных условиях известен.

§ 6. Уравнения ламинарного движения газированной жидкости в неизменяемой пористой среде при различных скоростях жидкой и газовой фаз.

Примем, что жидкая и газовая фазы той смеси, в виде которой мы представляем себе газированную жидкость, движутся в пористой среде с различными скоростями. Введём следующие обозначения:

Для жидкой фазы (раствора):

u_1, v_1, w_1 — компоненты скорости фильтрации, q — плотность, μ_1 — коэффициент абсолютной вязкости, p — гидродинамическое давление.

Для газовой фазы (свободный газ):

u_2, v_2, w_2 — компоненты скорости фильтрации, ρ — плотность, μ_2 — коэффициент абсолютной вязкости.

Для определения скоростей ламинарной фильтрации жидкой и газовой фаз применим формулы (2.2) главы II, принадлежащие Дарси, но при этом введём поправочные коэффициенты: один для жидкости, другой для газа. Эти коэффициенты,

зависящие от насыщенности σ, должны быть определены из опыта. Проницаемость пористой среды для ламинарной фильтрации однородной жидкости обозначим через k; имеем

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{k}{\mu_1} f(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_1 &= -\frac{k}{\mu_1} f(\sigma) \frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_1 &= -\frac{k}{\mu_1} f(\sigma) \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -\frac{k}{\mu_2} \varphi(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_2 &= -\frac{k}{\mu_2} \varphi(\sigma) \frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_2 &= -\frac{k}{\mu_2} \varphi(\sigma) \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Для функций

$$f = f(\sigma), \quad \varphi = \varphi(\sigma), \tag{6.3}$$

входящих в равенства (6.1) и (6.2), очевидно, имеем

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \tag{6.4}$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0. \tag{6.5}$$

Эти функции, исследование которых будет дано ниже; в § 9, введены впервые американскими учёными Мускатом (Muskat) и Миресом (Meres).

Для определения двух основных неизвестных величин: гидродинамического давления $p(x, y, z, t)$ и насыщенности $\sigma(x, y, z, t)$ мы составим два совместных дифференциальных уравнения, написав отдельно уравнение неразрывности для жидкой фазы и уравнение неразрывности для газовой фазы.

Так как плотность раствора (жидкой фазы) q меняется с изменением давления, то мы должны рассматривать её как функцию координат и времени

$$q = q(x, y, z, t). \tag{6.6}$$

Но поскольку это изменение будет незначительным, мы можем принять, что

$$q = q_0 + \Delta q, \tag{6.7}$$

где q_0 есть постоянная величина, а отношение $\frac{\Delta q}{q_0}$ есть малая величина.

При движении жидкой фазы из неё выделяется по мере падения давления растворённый газ, но происходящее при этом изменение плотности q, как уже было упомянуто, незначительно. Поэтому для упрощения мы примем плотность жидкой фазы постоянной и равной q_0, а выделяющуюся из раствора массу газа будем определять по закону Генри.

Согласно сказанному в конце § 1, масса жидкости в единице объёма пористой среды равна $mq\sigma$, следовательно, отнесённое к единице времени изменение массы жидкой фазы, заключённой в элементе объёма пористой среды, будет

$$\frac{\partial}{\partial t}(mq\sigma\, dx\, dy\, dz),$$

или, приближённо,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} mq_0\, dx\, dy\, dz.$$

Согласно закону Генри, масса газа, выделившаяся из раствора в элементе объёма при падении давления на величину $-dp$ за единицу времени, равна

$$mc\sigma \frac{Dp}{dt} dx\, dy\, dz,$$

где c есть постоянная закона Генри [см. уравнение (2.5)], а $\frac{Dp}{dt}$ есть субстанциальная производная, равная

$$\frac{Dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u_1 + \frac{\partial p}{\partial y} v_1 + \frac{\partial p}{\partial z} w_1. \tag{6.8}$$

Конвективное приращение массы в элементе объёма за единицу времени будет

$$-q_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Отсюда имеем баланс массы жидкой фазы в единицу времени в элементе объёма неизменяемой пористой среды:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{mc\sigma}{q_0} \frac{Dp}{dt} + m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{6.9}$$

Выделившаяся из жидкой фазы масса газа

$$-mc\sigma\frac{Dp}{dt}\,dx\,dy\,dz$$

будет прибавляться к газовой фазе.

Конвективное приращение массы газа в элементе объёма пористой среды за единицу времени будет

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_2)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz.$$

Согласно сказанному в конце § 1, масса газа в единице объёма пористой среды равна

$$m\rho(1-\sigma),$$

следовательно, отнесённое к единице времени изменение массы газовой фазы, заключённой в элементе объёма пористой среды, будет

$$\frac{\partial}{\partial t}[m\rho(1-\sigma)\,dx\,dy\,dz]=m\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1-\sigma)].$$

Отсюда имеем баланс массы газовой фазы в единицу времени в элементе объёма неизменяемой пористой среды

$$\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_2)}{\partial z}+mc\sigma\frac{Dp}{dt}+m\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1-\sigma)]=0. \quad (6.10)$$

Внося (6.1) в (6.9), мы получим уравнение

$$f(\sigma)\nabla^2 p+f'(\sigma)\Delta(p,\sigma)+$$
$$+\frac{\mu_1 mc\sigma}{kq_0}\left[\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{k}{\mu_1}f(\sigma)\Delta_1 p\right]=\frac{m\mu_1}{k}\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \quad (6.11)$$

где введены обозначения

$$\nabla^2 p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (6.12)$$

$$\Delta(p,\sigma)=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z}, \quad (6.13)$$

$$\Delta_1 p=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \quad (6.14)$$

Примем, в достаточном согласии с опытами, что изменение состояния газа происходит по изотермическому закону

$$p=\beta\rho, \quad (6.15)$$

где β есть газовая постоянная. Внося (6.2) и (6.15) в уравнение (6.10), мы получим

$$\varphi(\sigma)[p\nabla^2 p + \Delta_1 p] + p\varphi'(\sigma)\Delta(p,\sigma) - \\ - \frac{m\beta c\mu_2\sigma}{k}\left[\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1} f(\sigma)\Delta_1 p\right] = \frac{m\mu_2}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left[p(1-\sigma)\right]. \quad (6.16)$$

Нелинейные уравнения с частными производными второго порядка (6.11) и (6.16) при заданных начальных и граничных условиях служат для определения двух неизвестных:

$$p(x, y, z, t) \text{ и } \sigma(x, y, z, t).$$

Следует заметить, что уравнение (6.9) можно получить непосредственно из уравнения (1.1) главы II, если принять плотность сжимаемой жидкости равной q и внести вместо m, согласно сказанному в конце § 1, величину $m\sigma$. Тогда при постоянном m мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(qu_1) + \frac{\partial}{\partial y}(qv_1) + \frac{\partial}{\partial z}(qw_1) + m\frac{\partial}{\partial t}(q\sigma) = 0, \quad (6.17)$$

или

$$q\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial q}{\partial x}u_1 + \frac{\partial q}{\partial y}v_1 + \frac{\partial q}{\partial z}w_1 + \\ + m\sigma\frac{\partial q}{\partial t} + mq\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (6.18)$$

Так как плотность q очень мало отклоняется от постоянной величины q_0 и так как

$$u_1 = m\sigma\bar{u}_1, \quad v_1 = m\sigma\bar{v}_1, \quad w_1 = m\sigma\bar{w}_1,$$

где $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, $\bar{w}_1$ суть составляющие истинной скорости движения жидкой фазы в пористой среде, то из уравнения (6.18) приближённо получаем

$$q_0\left(m\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) + m\sigma\frac{\overline{Dq}}{dt} = 0, \quad (6.19)$$

где субстанциальная производная $\frac{\overline{Dq}}{dt}$ относится к истинной скорости движения. Примем теперь, в согласии с законом Генри, что выделяющаяся из жидкой фазы вследствие падения давления масса газа в единицу времени пропорциональна

субстанциальной производной от давления (6.8), взятой с обратным знаком, т. е.

$$\frac{\overline{Dq}}{dt} = -c\frac{Dp}{dt} \tag{6.20}$$

Внося (6.20) в (6.19), получим уравнение (6.9).

Уравнения (6.11) и (6.16) впервые опубликованы нами в 1945 г.[1]).

§ 7. Случай, когда насыщенность есть функция только давления.

Если, что представляется нам наиболее вероятным, насыщенность σ есть функция только гидродинамического давления p, т. е.

$$\sigma = \sigma(p), \tag{7.1}$$

то уравнения (6.11) и (6.16) упрощаются. На основании (7.1) имеем соотношения

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \Delta(p, \sigma) = \frac{d\sigma}{dp}\Delta_1 p, \tag{7.2}$$

которые надо подставить в уравнения (6.11) и (6.16). В результате получаем для решения задачи о движении газированной жидкости уравнения

$$f(\sigma)\nabla^2 p + \left[f'(\sigma)\frac{d\sigma}{dp} - \frac{mc\sigma}{q_0}f(\sigma)\right]\Delta_1 p = \\ = \frac{m\mu_1}{k}\left(\frac{d\sigma}{dp} - \frac{\sigma c}{q_0}\right)\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{7.3}$$

$$\varphi(\sigma)p\nabla^2 p + \left[\varphi(\sigma) + p\varphi'(\sigma)\frac{d\sigma}{dp} + \frac{m\beta c\mu_2\sigma}{\mu_1}f(\sigma)\right]\Delta_1 p = \\ = \frac{m\mu_1}{k}\left[1 - (1-\beta c)\sigma - p\frac{d\sigma}{dp}\right]\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{7.4}$$

В случае установившегося движения уравнения (7.3) и (7.4) принимают вид

$$f(\sigma)\nabla^2 p + \left[f'(\sigma)\frac{d\sigma}{dp} - \frac{mc\sigma}{q_0}f(\sigma)\right]\Delta_1 p = 0, \tag{7.5}$$

$$\varphi(\sigma)p\nabla^2 p + \left[\varphi(\sigma) + p\varphi'(\sigma)\frac{d\sigma}{dp} + \frac{m\beta c\mu_2\sigma}{\mu_1}f(\sigma)\right]\Delta_1 p = 0. \tag{7.6}$$

---

[1]) «Доклады Академии наук СССР» 1945 г., № 3, стр. 173.

Исключая из (7.5) и (7.6) отношение

$$\nabla^2 p : \Delta_1 p,$$

мы получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{f'}{f}\right) p \frac{d\sigma}{dp} + \frac{mc\sigma}{q_0} + \varepsilon\beta cm \left[\frac{\sigma f(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right] + 1 = 0, \quad (7.7)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (7.8)$$

Из этого уравнения определяется $\sigma(p)$ или, наоборот, $p(\sigma)$. Зная одну из этих функций, найдём гидродинамическое давление путём интегрирования дифференциального уравнения

$$\nabla^2 p + F_1(p)\,\Delta_1 p = 0, \quad (7.9)$$

где $F_1(p)$ есть известная функция от p.

В случае неустановившегося движения мы можем отбросить в первом приближении в правых частях уравнений (7.3) и (7.4) члены, содержащие $\Delta_1 p$, как малые величины второго порядка. Тогда получим уравнения

$$f(\sigma)\nabla^2 p = \frac{m\mu_1}{k}\left(\frac{d\sigma}{dp} - \frac{\sigma c}{q_0}\right)\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.10)$$

$$\varphi(\sigma) p \nabla^2 p = \left\{\frac{m\mu_2}{k}\left[(1-\sigma) - p\frac{d\sigma}{dp}\right] + \frac{m\beta c\mu_2\sigma}{k}\right\}\frac{\partial p}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Исключая из (7.10) и (7.11) отношение

$$\nabla^2 p : \frac{\partial p}{\partial t},$$

мы получим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon + \frac{\varphi(\sigma)}{f(\sigma)} p \frac{d\sigma}{dp} - \frac{c}{q_0}\left[\frac{\sigma\varphi(\sigma)}{f(\sigma)}\right] p + \varepsilon(1-\beta c)\sigma - \varepsilon = 0, \quad (7.12)$$

позволяющее определить $\sigma(p)$ или, наоборот, $p(\sigma)$. Зная одну из этих функций, мы найдём гидродинамическое давление p из уравнения

$$\nabla^2 p + F_2(p)\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (7.13)$$

где $F_2(p)$ есть известная функция от давления p.

Если в уравнениях (7.3) и (7.4) коэффициенты при величинах

$$\nabla^2 p, \quad \Delta_1 p, \quad \frac{\partial p}{\partial t}$$

пропорциональны, то между ними существуют соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\frac{d\sigma}{dp} - \frac{mc\sigma}{q_0} &= \frac{1}{p} + \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\frac{d\sigma}{dp}\frac{m\beta c\varepsilon\sigma f(\sigma)}{p\varphi(\sigma)}, \\ \frac{d\sigma}{dp} - \frac{cc}{q_0} &= \frac{\varepsilon f(\sigma)}{p\varphi(\sigma)}\left[1 - (1-\beta c)\sigma - p\frac{d\sigma}{dp}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

Определив отсюда $\sigma(p)$, мы получим для определения гидродинамического давления p дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 p + A(p)\Delta_1 p = B(p)\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.15)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ суть известные функции p.

Уравнения (7.12) и (7.7) приводятся к виду

$$p\frac{d\sigma}{dp} = a_1(\sigma) + a_2(\sigma)p, \quad (7.16)$$

где $a_1(\sigma)$ и $a_2(\sigma)$ суть известные функции от насыщенности σ. Так как в практических задачах давление p меняется в узких пределах, то приближённо можно принять в правой части (7.16) для p среднее в интервале значение, т. е. считать p постоянным и равным

$$p = \bar{p}. \quad (7.17)$$

В этом случае решение уравнения (7.16) будет иметь вид

$$p = \text{const.}\, e^{\theta(\sigma)}, \quad (7.18)$$

где

$$\theta(\sigma) = \int \frac{d(\sigma)}{a_1(\sigma) + \bar{p}a_2(\sigma)}. \quad (7.19)$$

§ 8. Частный случай, когда скорости жидкой и газовой фаз одинаковы.

В этом случае мы имеем

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2. \quad (8.1)$$

Плотность смеси γ, введённая нами в § 2, определяется по

формуле

$$\gamma = q\sigma + \rho(1-\sigma), \tag{8.2}$$

которая, при принятом нами допущении, что $q = q_0$, принимает вид

$$\gamma = q_0\sigma + \rho(1-\sigma). \tag{8.3}$$

Складывая уравнения (6.9) и (6.10) и принимая во внимание соотношения (8.1) и (8.3), мы получим уравнение (4.4), в котором вместо u, v, w стоят $u_1, v_1 w_1$, т. е. придём к случаю, уже рассмотренному нами в § 4. В этом случае, как это следует из равенств (6.1) и (6.2), мы имеем

$$\frac{k}{\mu_1} f(\sigma) = \frac{k}{\mu_2} \varphi(\sigma) = \frac{k}{\mu}, \tag{8.4}$$

причём $\frac{k}{\mu}$ относится к фильтрации смеси жидкости и газа.

§ 9. Функциональная зависимость проницаемости жидкости и газа в пористой среде от насыщенности.

Дадим, исходя из графиков Вайкофа (Wyckoff) и Ботсета (Botset) (фиг. 21), аналитическое выражение для коэффициентов проницаемости k_1 жидкой фазы и k_2 газовой фазы как функций от насыщенности σ[1]).

Если k есть проницаемость при фильтрации однородной жидкости через рассматриваемую пористую среду, то, согласно § 6, мы имеем соотношения

$$\frac{k_1}{k} = f(\sigma), \quad \frac{k_2}{k} = \varphi(\sigma). \tag{9.1}$$

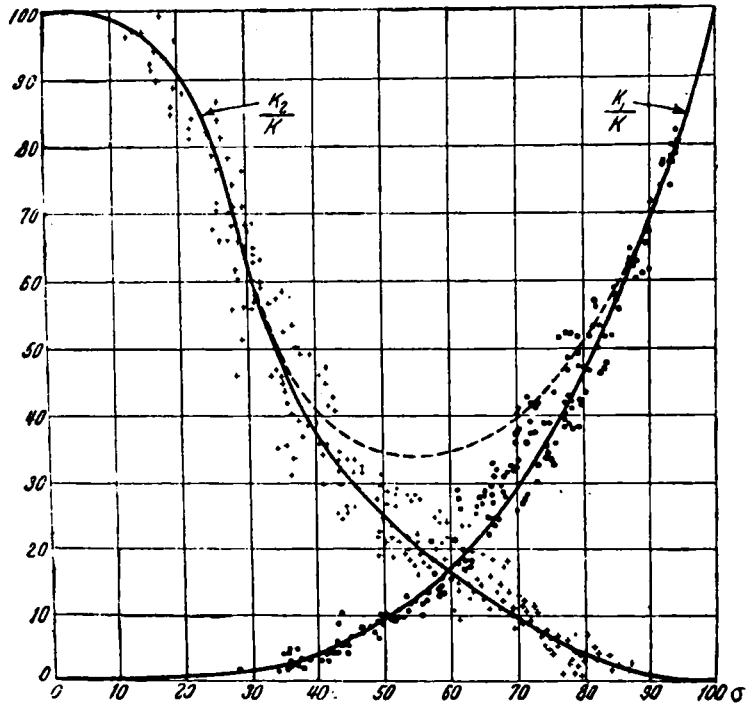
Газовые пузырьки стесняют проходы между частицами пористой среды, через которую течёт газированная жидкость. Поэтому пористость этой среды m уменьшается до величины m_1, определяемой по формуле

$$m_1 = m\sigma. \tag{9.2}$$

Следовательно, мы можем вычислять движение жидкой фазы

[1]) Подробное описание опытов Вайкофа и Ботсета и анализ их графиков смотреть в статье Б. Б. Лапука. См. журнал «Нефтяная промышленность СССР» № 5, 1941 г.

как однородной жидкости в среде с пористостью m_1, определяемой формулой (9.2).



Фиг. 21.

Согласно формулам Слихтера и Козени [глава I, (5.18) и (6.17)], имеем

$$k = am^n, \tag{9.3}$$

где a есть постоянный коэффициент, зависящий от диаметра частицы пористой среды, а показатель степени равен по Слихтеру

$$n = 3,3,$$

а по Козени

$$n = 4.$$

Так как жидкая фаза течёт через среду с пористостью m_1,

то, согласно формуле (9.3), имеем для проницаемости жидкой фазы выражение

$$k_1 = am_1^n. \tag{9.4}$$

Из (9.4) и (9.2) находим

$$k_1 = am^n\sigma^n. \tag{9.5}$$

Из (9.3) и (9.5) получаем

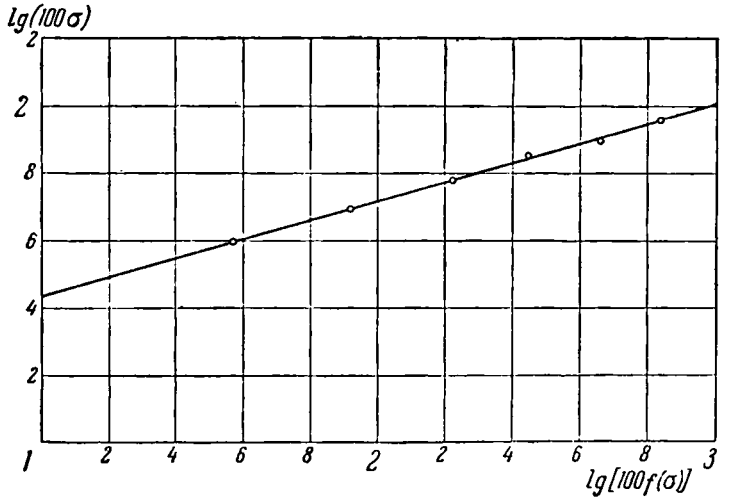
$$\frac{k_1}{k} = \sigma^n. \tag{9.6}$$

Таким образом, из (9.1) и (9.6) мы имеем основное соотношение

$$f(\sigma) = \sigma^n, \tag{9.7}$$

удовлетворяющее условиям (6.4).

Для сравнения соотношения (9.7) с опытными данными, мы построим диаграмму (фиг. 22), отложив по оси абсцисс зна-



Фиг. 22.

чения $\lg f(\sigma)$, а по оси ординат — значения $\lg \sigma$. Мы видим, что точки, полученные обмером графика Вайкофа и Ботсета, очень хорошо группируются около прямой

$$\lg f(\sigma) = n \lg \sigma. \tag{9.8}$$

Из обмера диаграммы мы нашли, что приближённо можно принять

$$n = 3\frac{2}{3}. \tag{9.9}$$

Это значение n отлично согласуется с числами, даваемыми теориями Слихтера и Козени, и показывает, что формула (9.7) даёт удачное приближённое представление для $f(\sigma)$.

На основании исследования графика Вайкофа и Ботсета (фиг. 21) мы наложим следующие условия на функцию $\varphi(\sigma)$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \quad \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(1) &= 0, \quad \varphi'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Чтобы удовлетворить условиям (9.10) и использовать аналогию с формулой (9.7), мы примем

$$\varphi(\sigma) = (1-\sigma)^p(1 + A\sigma^q + B\sigma^r + \ldots), \tag{9.11}$$

где $p, q, r, \ldots, A, B, \ldots$ суть постоянные, подлежащие определению.

Условия (9.10) требуют, чтобы

$$p \geqslant 2, \quad A = p, \quad r > q, \quad q = 1. \tag{9.12}$$

Тогда наиболее простым выражением для $\varphi(\sigma)$ будет

$$\varphi(\sigma) = (1-\sigma)^3(1+3\sigma) = 1 - 6\sigma^2 + 8\sigma^3 - 3\sigma^4, \tag{9.13}$$

откуда, в частности, следует

$$\varphi''\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16},$$

что хорошо согласуется с графиком.

ГЛАВА V.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Опыты В. Клауда.

Проведение опытов над движением газированной жидкости в пористой среде сопряжено с большими техническими трудностями. До сих пор такие опыты производились только в Соединённых штатах Сев. Америки в связи с запросами нефтяной промышленности.

Первая обстоятельная работа была опубликована В. Клаудом (W. Cloud) в «Petroleum Development» за 1930 г. В ней В. Клауд сообщает о ряде опытов, которые он произвёл над движением смеси нефти и газа, а также смеси нефти и воздуха по цилиндрической трубе, наполненной песком. К сожалению, описание опытов сделано очень кратко, а диаграммы распределения давления в трубе даны в таком малом масштабе, что трудно произвести по ним числовые отсчёты (фиг. 23 и 24). Труба, по которой протекала смесь нефти и газа, имела длину в 10 футов (около 3 *м*) с внутренним диаметром 3,87 дюйма и была установлена горизонтально. В шести точках, отмеченных на фиг. 23 и 24 цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*, были установлены манометры. Смесь вступала в трубу при избыточном давлении в 250 англ. фунт/кв. дюйм (1 *кг/см*^{2} = 14,223 англ. фунт/кв. дюйм); при выходе на другом конце трубы создавались различные противодавления.

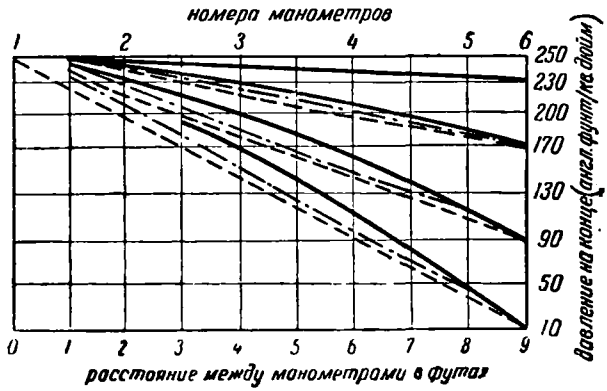
Исследовались три нефти: Kiefer, Tonkawa и Cromwell, основные характеристики которых даны в таблице 3.

На фиг. 23 и 24 даны кривые падения давления по длине трубы при различных избыточных давлениях на её выходном

Таблица 3. **Характеристика нефти в опытах Клауда.**

Нефть	Удельный вес γ в $г/см^3$ при 60°Ф ($\approx 16°$ Ц)	Объёмный газовый фактор ζ, соответствующий растворению газа в нефти при избыточном давлении в 250 англ. фунт/кв. дюйм	Динамическая вязкость μ в пуазах при 100° Ф ($\approx 38°$ Ц)
Kiefer	0,87	7,23	0,095
Tonkawa	0,84	9,50	0,045
Cromwell	0,86	8,33	0,075

конце, но при одном и том же начальном избыточном давлении в 250 англ. фунт/кв. дюйм. Прямая линия соответствует случаю движения мёртвой нефти (без газа или воздуха).



Фиг. 23.

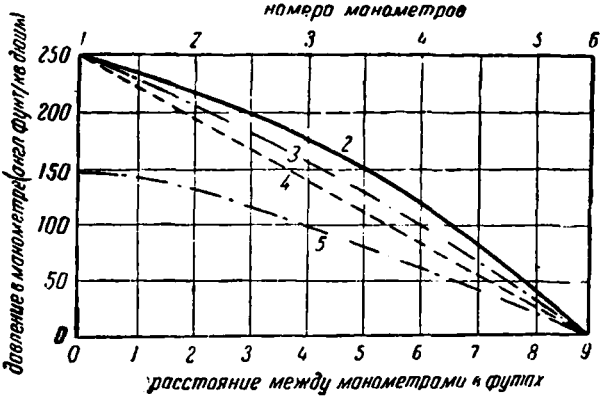
Это вполне правильно, ибо при одномерном установившемся движении мёртвой нефти уравнение (5.6) главы II даёт:

$$\frac{d^2p}{dx^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$p = C_1 x + C_2. \qquad (1.1)$$

Если на оси абсцисс откладывать удаление манометров от начала трубы, а на оси ординат — давление, то получится кривая распределения давления вдоль трубы, и, как показывает уравнение (1.1), эта кривая является прямой линией. Это будет иметь место при всяком противодавлении.



Фиг. 24.

Если предположить, что в этих опытах происходит совместное движение жидкости и газа, то оно будет представлено уравнением (4.16) главы IV. Так как движение установившееся и одномерное, то на основании формулы (5.1) главы IV мы имеем

$$\frac{d^2\bar{q}}{dx^2}=0,$$

причём ось Ox направлена по оси трубы. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\bar{q}=C_1x+C_2. \tag{1.2}$$

Из формулы (4.19) главы IV следует, что величина $\bar{q}$ пропорциональна величине ψ, определяемой формулами (4.17) и (4.18) главы IV, поэтому мы можем написать уравнение (1.2) в виде

$$\psi=C_3x+C_4, \tag{1.3}$$

где C_3 и C_4 суть произвольные постоянные. Следовательно, если положения манометров отмечать на оси абсцисс, а зна-

чения $\phi(p)$ откладывать на оси ординат, то получается прямая линия.

Так как ζ есть отношение объёма газа, растворённого при давлении p_0, к объёму растворителя, то, обозначая через ρ_a плотность газа при атмосферном давлении p_a, мы получим из уравнения (2.5) главы IV, полагая в нём $p=p_a$, что

$$\zeta\rho_a = c\,(p_0 - p_a),$$

откуда следует

$$c = \frac{\zeta\rho_a}{p_0 - p_a}. \tag{1.4}$$

Аналогичным образом из формулы (2.6) главы IV имеем

$$\beta = \frac{p_a}{\rho_a}. \tag{1.5}$$

Внося (1.4) и (1.5) в равенство (2.19) главы IV, мы получим формулу

$$\vartheta = \frac{\xi + \eta + \dfrac{\zeta p_a}{p_0 - p_a}}{1 + \xi}, \tag{1.6}$$

позволяющую найти ϑ по данным ξ, η, ζ, p_0. Так как q_0 есть плотность жидкой фазы в объёме V_0 при давлении p_0, то мы имеем соотношение

$$\gamma_0(V_0 + V_1) = q_0 V_0 + V_1\rho_0. \tag{1.7}$$

Определяя отсюда V_1, мы получим на основании (2.13) главы IV формулу

$$\xi = \frac{q_0 - \gamma_0}{\gamma_0 - \rho_0}, \tag{1.8}$$

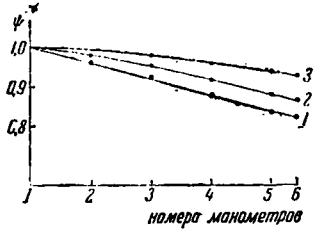
позволяющую вычислить ξ по данным q_0, γ_0, ρ_0.

При обработке наблюдений В. Клауда значения ϑ вычислялись по формуле (1.6), но при этом принималось, что свободного газа не было, т. е. принималось, что $\xi=0$. Кроме того, величина η принималась равной нулю. Иными словами, ϑ вычислялось по формуле

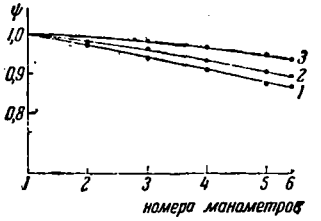
$$\vartheta = \zeta\frac{p_a}{p_0 - p_a}. \tag{1.9}$$

Отсюда при $p_a = 15$ фунт/дюйм² и $p_0 = 250$ фунт/дюйм², получаем $\vartheta = 0{,}0638\zeta$. Так как значения ζ для трёх нефтей были разные, то были разными и значения ϑ. Результаты вычислений, выполненных Т. А. Тарасовой, даны в таблицах 4, 5, 6 и 7.

На фиг. 25, 26, 27 результаты этих вычислений изображены графически. На оси абсцисс отмечено положение манометров вдоль трубы, а на оси ординат отложены вычисленные

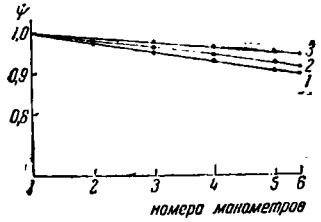


Фиг. 25.

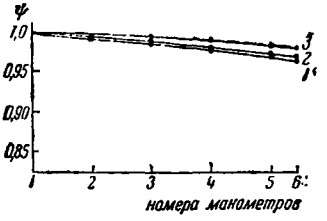


Фиг. 26.

значения ψ при противодавлениях 0,90, и 170 англ. фунт. на кв. дюйм. Вычисленные точки очень близко ложатся около прямых линий, как это и должно быть, согласно уравнению (1.3). Ввиду того что в опытах Клауда в трубе мог быть



Фиг. 27



Фиг. 28.

и свободный газ, в таблице 7 дана обработка его опытов при $\vartheta = 0{,}75$. Результаты вычислений изображены на фиг. 28; определённые точки располагаются тоже около прямой линии.

Таким образом, экспериментальные исследования Клауда говорят в пользу теории совместного движения жидкой и газовой фаз.

Таблица 4. **Обработка опытов В. Клауда. Нефть Cromwell; $\zeta = 7{,}23$; $\vartheta = 0{,}461$; $p_0 = 250$ англ. фунт/дюйм².**

p	Определённые величины	Номера манометров					
		1	2	3	4	5	6
0	p/p_0	1	0,88	0,717	0,502	0,22	0,06
	U *)	1	0,93	0,847	0,732	0,58	0,448
	ψ **)	1	0,963	0,923	0,876	0,831	0,818
90	p/p_0	1	0,936	0,834	0,672	0,497	0,40
	U	1	0,965	0,910	0,823	0,729	0,677
	ψ	1	0,982	0,953	0,913	0,875	0,853
170	p/p_0	1	—	0,926	0,845	0,747	0,70
	U	1	—	0,960	0,916	0,863	0,838
	ψ	1	—	0,979	0,957	0,931	0,920

*) Значения U вычислены по формуле (4.17) главы IV.
**) Значения ψ вычислены по формуле (4.18) главы IV.

Таблица 5. **Обработка опытов В. Клауда. Нефть Kiefer; $\zeta = 8{,}33$; $\vartheta = 0{,}531$; $p_0 = 250$ англ. фунт/дюйм².**

p	Определённые величины	Номера манометров					
		1	2	3	4	5	6
0	p/p_0	1	0,88	0,717	0,502	0,22	0,06
	U	1	0,944	0,867	0,766	0,624	0,559
	ψ	1	0,975	0,943	0,908	0,874	0,868
90	p/p_0	1	0,936	0,834	0,672	0,497	0,40
	U	1	0,970	0,922	0,846	0,764	0,719
	ψ	1	0,986	0,965	0,935	0,907	0,894
170	p/p_0	1	—	0,926	0,845	0,747	0,70
	U	1	—	0,965	0,927	0,881	0,869
	ψ	1	—	0,984	0,967	0,948	0,940

Таблица 6. **Обработка опытов В. Клауда. Нефть Tonkawa; $\zeta = 9{,}5$; $\vartheta = 0{,}606$; $p_0 = 250$ англ. фунт/дюйм².**

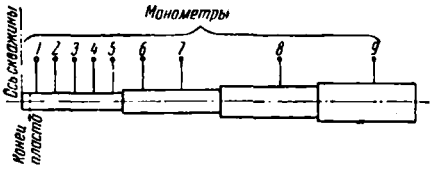
p	Определённые величины	Номера монометров					
		1	2	3	4	5	6
0	p/p_0	1	0,88	0,717	0,502	0,22	0,06
	U	1	0,953	0,888	0,804	0,693	0,630
	ψ	1	0,982	0,960	0,937	0,915	0,910
90	p/p_0	—	0,936	0,834	0,672	0,497	0,40
	U	—	0,975	0,935	0,871	0,802	0,764
	ψ	—	0,991	0,976	0,954	0,936	0,927
170	p/p_0	—	—	0,926	0,845	0,747	0,70
	U	—	—	0,971	0,939	0,900	0,881
	ψ	—	—	0,989	0,977	0,964	0,958

Таблица 7. **Обработка опытов В. Клауда. $\vartheta = 0{,}75$, $p_0 = 250$ англ. фунт/дюйм².**

p	Определённые величины	Номера манометров					
		1	2	3	4	5	6
0	p/p_0	1	0,88	0,717	0,502	0,22	0,06
	U	1	0,97	0,929	0,875	0,805	0,765
	ψ	1	0,994	0,984	0,975	0,968	0,966
90	p/p_0	1	0,936	0,834	0,672	0,497	0,40
	U	1	0,984	0,958	0,918	0,874	0,852
	ψ	1	0,996	0,991	0,981	0,975	0,972
170	p/p_0	1	—	0,926	0,845	0,747	0,70
	U	1	—	0,981	0,961	0,937	0,925
	ψ	1	—	0,996	0,991	0,985	0,983

§ 2. Сравнение с опытами Л. Юрена.

Л. Юрен (L. Uren) произвёл серию опытов над движением смеси нефти и газа в песке при давлениях до 1000 англ. фунтов на кв. дюйм при разных противодавлениях на выходном конце трубы. Так как при небольшой толщине пласта истечение нефти через скважину можно рассматривать как радиальное, то он вместо цилиндрического пласта взял трубу, поперечное сечение которой изменялось по специальному закону—так, чтобы оно всегда равнялось площади соответствующего цилиндрического сечения пласта. Для получения требуемой температуры труба была окружена паровой рубашкой. Эффективный диаметр песчинок был около 0,50 *мм*. Для опытов применялась лос-анжелосская нефть удельного веса 21,3 по А. Р. I. Динамическая вязкость её была $\mu = 0{,}92$ пуаза при 17,2° Ц и $\mu = 0{,}073$ пуаза при 90° Ц. Было проведено девять серий опытов. Для замера давлений было взято девять манометров, схема расположений которых дана на фиг. 29. Так как движение радиальное и установившееся, то уравнение (5.1) главы IV даёт:



Фиг. 29.

$$\frac{d^2\bar{q}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{q}}{dr} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\bar{q} = C_1 \ln \frac{r}{R} + C_2, \qquad (2.1)$$

где R — радиус пласта, r — рассстояние от оси скважины, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий в начале и конце трубы, что отвечает наружной границе пласта и периметру скважины. Уравнение (2.1) удобнее представить в виде

$$\Phi = A \lg \left(100 \frac{r}{R}\right) + B, \qquad (2.2)$$

где A и B — определённые постоянные. Если на оси абсцисс

гкладывать значения $\lg\left(100\frac{r}{R}\right)$, а на оси ординат зна-
ения Ψ, то уравнение (2.2) изобразится прямой линией.

Для обработки наблюдений по нашей формуле надо опре-елить ϑ по формуле (1.9), внося туда

$$\zeta = 20{,}5;\ p_0 = 600 \text{ фунт/дюйм}^2,\ p_a = 15 \text{ фунт/дюйм}^2,$$

го даёт

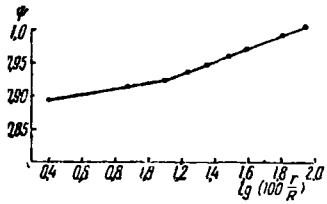
$$\vartheta = 0{,}526.$$

езультаты вычислений, выполненных Т. А. Тарасовой, даны таблице 8.

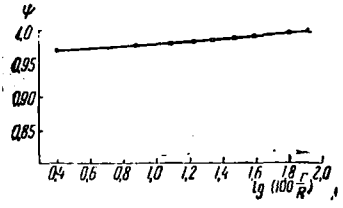
Таблица 8. **Обработка опытов Л. Юрена: $\zeta = 20{,}5$; $\vartheta = 0{,}560$; $p_0 = 600$ англ. фунт/дюйм².**

Опре-делён-ные ве-личины	Номера манометров								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p/p_0	0,270	0,408	0,515	0,600	0,680	0,775	0,845	0,940	1,0
u	0,670	0,739	0,786	0,824	0,859	0,901	0,931	0,973	1,0
ψ	0,894	0,908	0,921	0,932	0,944	0,960	0,971	0,988	1,0
$\lg\left(100\frac{r}{R}\right)$	0,4	0,88	1,10	1,24	1,35	1,48	1,60	1,81	1,95

Графическое представление этих вычислений дано на иг. 30, причём рассматривается, конечно, случай установив-



Фиг. 30.



Фиг. 31.

егося движения. Мы видим, что точки, полученные путём ычислений, близко группируются около двух прямых линий.

Ввиду возможности наличия в пласте свободного газа, что овлияло бы на величину ϑ, мы даём обработку опытов

Л. Юрена для случая установившегося движения при начальных давлениях 1000, 600, 400 англ. фунтов на кв. дюйм, принимая $\vartheta = 0{,}75$. Результаты вычислений даны в таблице 9, из которой видно, что значения ϕ для одних и тех же мано-

Таблица 9. **Обработка опытов Л. Юрена; $\vartheta = 0{,}75$.**

p_0 в фунт/дюйм²	Определённые величины	Номера манометров								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	p/p_0	0,27	0,408	0,515	0,60	0,68	0,775	0,845	0,94	1,0
	u	0,82	0,853	0,879	0,90	0,92	0,944	0,961	0,985	1,0
	ϕ	0,969	0,972	0,976	0,976	0,983	0,987	0,991	0,996	1,0
1000	p/p_0	0,186	0,320	0,443	0,523	0,600	0,69	0,79	0,92	1,0
	u	0,796	0,83	0,860	0,881	0,90	0,922	0,947	0,98	1,0
	ϕ	0,968	0,970	0,973	0,976	0,979	0,983	0,988	0,995	1,0
400	p/p_0	0,285	0,43	0,55	0,632	0,710	0,79	0,875	0,95	1,0
	u	0,821	0,867	0,887	0,908	0,927	0,947	0,969	0,987	1,0
	ϕ	0,97	0,974	0,977	0,98	0,984	0,988	0,993	0,996	1,0
$\lg\left(100\frac{r}{R}\right)$		0,40	0,88	0,10	1,24	1,35	1,48	1,60	1,81	1,95

метров близки между собой. Поэтому на фиг. 31 соответственные точки сливаются друг с другом и располагаются очень близко около прямой линии.

Таким образом, обработка опытов Юрена подтверждает правильность гипотезы о совместном движении жидкой и газовой фаз.

§ 3. Сравнение теории с опытами Л. Рейда и Р. Хентингтона.

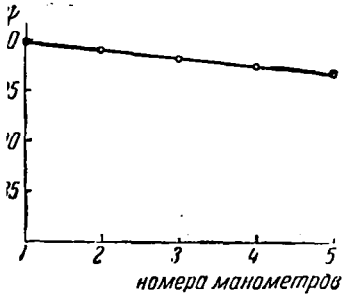
Л. Рейд (L. Reid) и Р. Хентингтон (R. Huntington) производили опыты с движением смеси нефти и газа через цилиндрическую трубу двухдюймового диаметра длиной 21 фут и 4 дюйма. Труба была наполнена несцементированным песком, пористость которого составляла $34{,}3\%$. Манометры были

положены в пяти точках на равных расстояниях друг от га. Ввиду того что в работе авторов нет достаточных ізаний о растворимости газа в нефти и о количестве бодного газа, мы при обработке наблюдений над установивмся движением, сведённых авторами в таблицу 1 своей работы, ользовали таблицу 3 их работы, составленную для неустаившегося движения в той же трубе. Это позволило сделать иближённую оценку необходимых данных. Объём нефти рубе был $V_0 = 3{,}75$ *л*. Внутренний объём трубы дли- 6,5 *м* и внутреннего диаметра 54 *мм* составлял 15 *л*. и пористости $m = 0{,}343$ мы получим для объёма порового странства величину 5,15 *л*. Отсюда объём свободного а составляет $V_1 = 1{,}4$ *л*. Это даёт нам

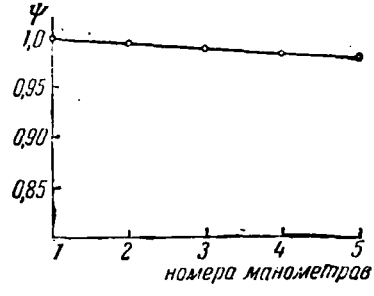
$$\xi = \frac{V_1}{V_0} = \frac{1{,}4}{3{,}75} = 0{,}37.$$

я вычисления количества растворённого газа следует прить, при давлении 42,5 *ат*, $\beta c = 0{,}65$, чему соответствует ачение $\zeta = 27$, вполне подходящее к обычно наблюдаюмся значениям этой величины. Величиной η, как и прежде, пренебрегаем. Внося в формулу (2.19) главы IV $\xi = 0{,}37$; $= 0{,}65$; $\eta = 0$, мы получим, что приближённо $\vartheta = 0{,}75$.

Результаты вычислений для этого значения ϑ сведены в блицу 10. Откладывая вычисленные значения функции ψ как



Фиг. 32.



Фиг. 33.

динаты на абсциссах, отмечающих положение манометров оль трубы, мы получим графики, изображённые на иг. 32 и 33.

Таблица 10. **Обработка опытов Л. Рейда и Р. Хентингтона; $\vartheta = 0{,}75$.**

№ опыта	p_0 в $кг/см^2$	Определённые величины	Номера манометров				
			1	2	3	4	5
1	42,5	p/p_0	0,985	0,783	0,627	0,396	0,189
		u	0,996	0,946	0,907	0,849	0,797
		ϕ	0,999	0,988	0,982	0,972	0,967
2	40,4	p/p_0	0,980	0,819	0,695	0,520	0,371
		u	0,995	0,955	0,924	0,880	0,843
		ϕ	0,998	0,989	0,984	0,976	0,971
3	40,8	p/p_0	0,983	0,848	0,755	0,625	0,537
		u	0,996	0,962	0,939	0,906	0,884
		ϕ	0,999	0,992	0,987	0,981	0,977
4	41,1	p/p_0	0,983	0,890	0,827	0,747	0,710
		u	0,996	0,972	0,957	0,937	0,927
		ϕ	0,999	0,993	0,990	0,986	0,983
5	41,2	p/p_0	0,983	0,847	0,755	0,629	0,531
		u	0,996	0,962	0,939	0,907	0,883
		ϕ	0,999	0,991	0,987	0,982	0,977

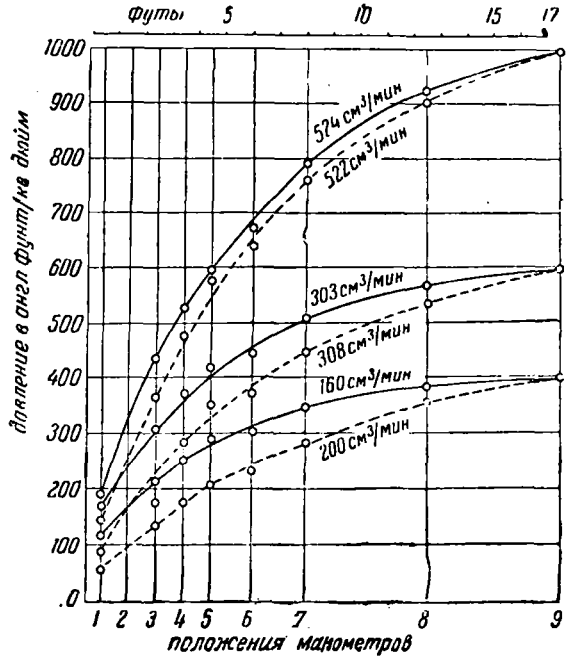
Мы видим, что точки наблюдений для рассматриваемого случая установившегося движения хорошо группируются около прямых линий.

Это снова подтверждает правильность нашей гипотезы о совместном движении жидкой и газовой фаз.

§ 4. Опыты Юрена над неустановившимся движением газированной нефти.

На фиг. 34 воспроизведена диаграмма опытов Юрена над установившимся движением газированной нефти через построенную им специальную трубу. Обработку этих опытов мы дали в § 3. На фиг. 35, 36, 37 представлены результаты наблюдений Юрена над неустановившимся движением газированной нефти в построенной им специальной трубе. Эти

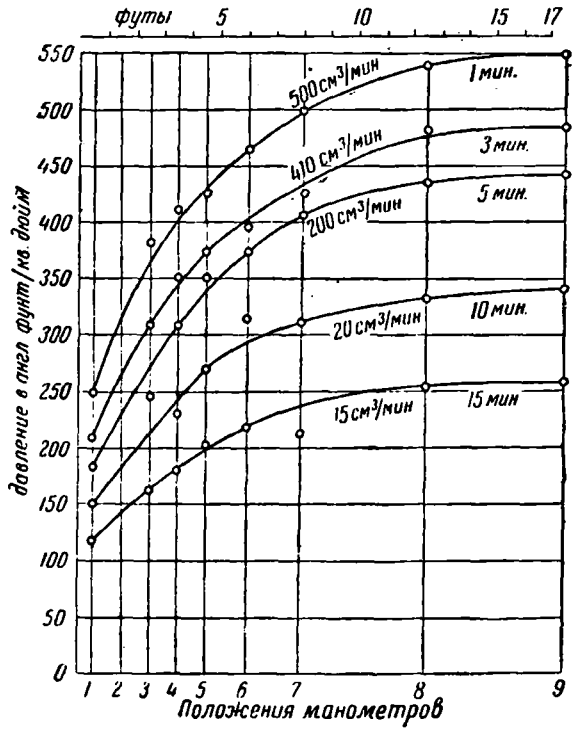
пыты велись аналогично нашим опытам над неустановившимся движением газа. Именно, труба была наполнена газированной нефтью, затем закрывались оба конца трубы (входной и выходной) до тех пор, пока во всей трубе не устанавливалось постоянное давление и взятые пробы не показывали одина-



Фиг. 34.

ковый газовый фактор. Затем открывался выходной конец трубы и производились через определённые промежутки времени замеры показаний манометров и объёмного количества вытекающей нефти. Опыты производились при начальном давлении в 1000, 600 и 400 англ. фунт/кв. дюйм. Однако Орен приводит только результаты опытов с неустановившимся движением при начальном давлении 600 англ. фунт/кв. дюйм, результаты которых представлены на фиг. 35. Сравнивая эту фигуру с фиг. 34, мы видим, что общий вид кривых распределения давления по длине пласта такой же, как и

при установившемся движении. На фиг. 34 и 35 около каждой кривой распределения давления отмечена скорость вытекания нефти в кубических сантиметрах в минуту. Затем Юрен построил для каждой из пяти кривых распределения давления соответствующие кривые процентного падения давления. Для

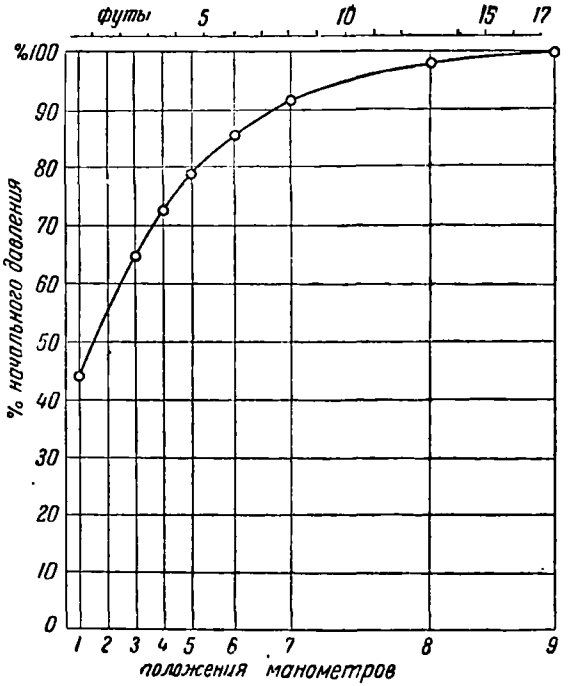


Фиг. 35.

этого каждое давление делилось на то давление, которое измерялось манометром у закрытого конца трубы. Таким образом, получились пять кривых, которые все, по утверждению Юрена, оказались идентичными (фиг. 36). Отсюда Юрен делает заключение, что в рассматриваемом случае газового режима пласта градиент давления, определяющий скорость истечения нефти из пласта, не зависит от первоначального давления, а зависит исключительно от свойств нефти и

проницаемости песка. В своих опытах Юрен нашёл, что газовый фактор равен $\zeta = 20{,}5$.

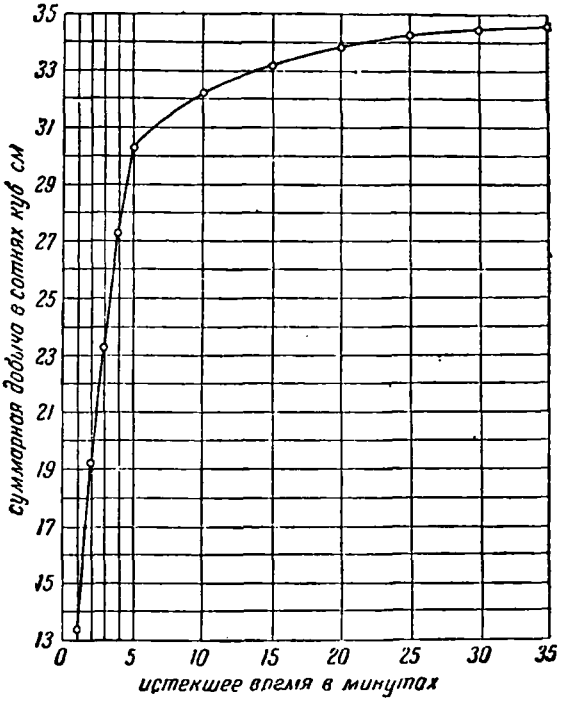
Кроме того, Юрен нашёл, что в рассматриваемом случае скорость истечения нефти из пласта в начале опыта больше соответствующей скорости в случае установившегося движения при тех же давлениях при входе и выходе из пласта. Однако в дальнейшем, при падении давления, когда градиент давле-



Фиг. 36.

ния сильно снижается, наблюдается обратное явление. По утверждению Юрена, интересный результат представляет так называемая кривая суммарной добычи пласта. Одна из таких кривых дана на фиг. 37. У этой и всех других опытных кривых, которых Юрен, к сожалению, не приводит, имеется излом в одном и том же месте. По обе стороны точки излома

кривая суммарной добычи имеет лёгкую выпуклость, направленную вверх. Вероятная причина этого, по мнению Юрена, состоит в том, что до точки излома истечение нефти из пласта происходит вследствие образования и роста



Фиг. 37.

газовых пузырьков, а после точки излома под действием статического давления газа, собирающегося в порах песка.

На фиг. 38 построен график, изображающий зависимость суммарной добычи от давления при выходе из трубы, отсчитанного по установленному здесь манометру. Точки, полученные на основании замера, группируются около двух прямых, причём место пересечения прямых соответствует упомянутой выше точке излома на фиг. 37.

§ 5. Газовое число.

При исследовании совместного движения газовой и жидкой фаз целесообразно ввести понятие о так называемом газовом числе [1]). *Газовым числом* η называется приходящийся на единицу веса жидкой фазы вес газовой фазы. Поэтому, если σ есть насыщенность, то вес газовой фазы будет пропорционален величине $\rho(1-\sigma)$, а вес жидкой фазы пропорционален величине $q\sigma$. Поэтому имеем

$$\eta = \frac{\rho(1-\sigma)}{q\sigma}. \qquad (5.1)$$

Эта формула даёт связь между насыщенностью и газовым числом. Из неё имеем

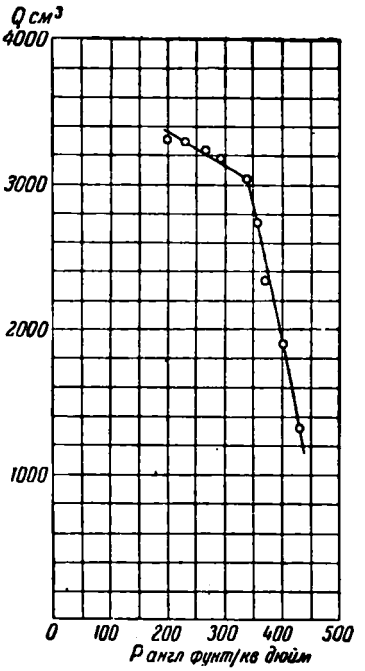
$$\sigma = \frac{\rho}{\rho + q\eta}. \qquad (5.2)$$

Далее, мы имеем [формула (8.2) главы IV]

$$\gamma = q\sigma + \rho(1-\sigma). \qquad (5.3)$$

Внося (5.2) в (5.3), получим формулу

$$\gamma = \frac{\rho q(1+\eta)}{\rho + q\eta}, \qquad (5.4)$$



Фиг. 38.

совпадающую с формулой (8) на стр. 243 цитированной нашей монографии.

---

[1]) Лейбензон Л. С.: Нефтепромысловая механика, часть вторая (Подземная гидравлика воды, нефти и газа), глава 11. Москва 1934.

ГЛАВА VI.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Уравнения установившегося движения газа в неизменяемой пористой среде.

В случае установившегося движения газа его давление p не зависит от времени t и является функцией только координат x, y, z. Поэтому при отсутствии сил уравнение установившегося движения газа будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial z}\right)=0 \qquad (1.1)$$

[см. уравнение (6.6) главы II], причём согласно равенству (6.1) главы II имеем

$$q=\int \rho\, dp \qquad (1.2)$$

и

$$\frac{\partial q}{\partial t}=0. \qquad (1.3)$$

Если отношение $\frac{k}{\mu}$ есть величина постоянная, то уравнение (1.1) принимает вид

$$\nabla^2 q=0. \qquad (1.4)$$

Интегрирование этого уравнения Лапласа даёт полное решение задачи об установившемся движении газа в неизменяемой пористой среде при заданных граничных условиях.

Компоненты скорости фильтрации газа, согласно формулам (2.2) главы II и формуле (1.2) этой главы, имеют

выражения:

$$\left.\begin{aligned} \rho u &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial x}, \\ \rho v &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial y}, \\ \rho w &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

§ 2. Одномерное течение газа.

Пусть движение происходит по направлению оси Ox. Тогда уравнение (1.4) принимает вид

$$\frac{d^2q}{dx^2} = 0. \tag{2.1}$$

Его общим интегралом будет

$$q = C_1 x + C_2. \tag{2.2}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$p = p_1 \text{ в начале при } x = 0,$$
$$p = p_2 \text{ в конце при } x = L.$$

В случае политропного процесса, определяемого уравнением (6.11) главы II, мы имеем, согласно формуле (6.12) главы II,

$$q = \frac{n}{\beta(n+1)} p^{\frac{n+1}{n}}. \tag{2.3}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{n}{\beta(n+1)} p_1^{\frac{n+1}{n}}, \\ q_2 &= \frac{n}{\beta(n+1)} p_2^{\frac{n+1}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

и граничные условия будут

$$\left.\begin{aligned} q &= q_1 \text{ при } x = 0, \\ q &= q_2 \text{ при } x = L. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Внося (2.5) в (2.2), мы получим

$$C_1 = \frac{q_2 - q_1}{L}, \quad C_2 = q_1.$$

Следовательно,

$$q = q_1 - \frac{q_1 - q_2}{L} x. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) даёт закон распределения давления при одномерном установившемся движении газа в неизменяемой пористой среде.

Скорость фильтрации определяется по формуле (1.5):

$$\rho u = \frac{k(q_1 - q_2)}{\mu L}. \tag{2.7}$$

В случае изотермического течения газа имеем по формуле (6.18) главы II

$$q = \frac{1}{2\beta} p^2. \tag{2.8}$$

Внося это значение q в (2.4) и (2.6), мы получим для изотермического одномерного течения газа в пористой среде соотношение

$$p^2 = p_1^2 - \frac{p_1^2 - p_2^2}{L} x. \tag{2.9}$$

Если на оси ординат наносить квадраты абсолютного давления, а на оси абсцисс — расстояния, то получится прямая линия.

Подставляя (2.8) в (2.7), мы найдём массу газа, протекающего через единицу площади при изотермическом режиме:

$$\rho u = \frac{k(p_1^2 - p_2^2)}{2\mu\beta L}. \tag{2.10}$$

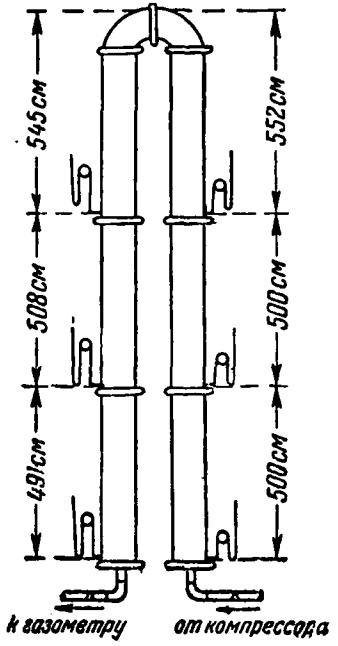
§ 3. Сравнение с опытами ГИНИ.

В 1928 г. в отделе Промысловой механики Государственного исследовательского нефтяного института (ГИНИ) под руководством Д. С. Вилькера был произведён ряд опытов по исследованию установившегося движения воздуха через 4-дюймовую трубу, наполненную мелким песком, взятым из

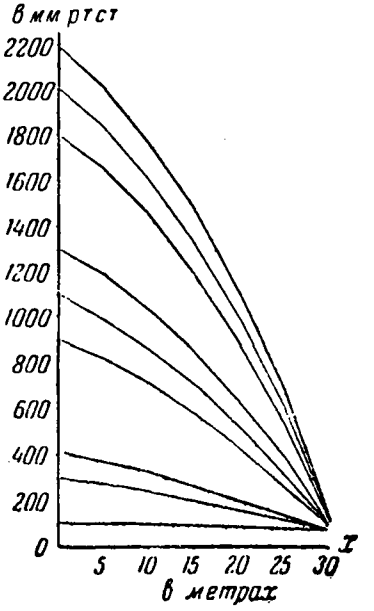
карьера на станции Люберцы Московско-Казанской железной дороги. Фракционный состав песка был следующий:

$d = 0{,}31$ и более *мм* 4,22%,
$d = 0{,}24 \div 0{,}31$ *мм* 5,05%,
$d = 0{,}21 \div 0{,}24$ *мм* 66,32%,
$d = 0{,}15 \div 0{,}21$ *мм* 22,57%,
$d = 0{,}13 \div 0{,}15$ *мм* 1,72%,
$d = 0{,}11 \div 0{,}13$ *мм* 0,09%,
$d = 0{,}08 \div 0{,}11$ *мм* . . . . . 0,09%.

Труба была поставлена вертикально и состояла из двух одинаковой длины прямых ветвей, соединённых наверху (фиг. 39)



Фиг. 39.



Фиг. 40.

дугообразно изогнутой трубой того же диаметра. Общая длина составляла $L = 31{,}1$ *м*. Это и было длиной пути воздуха, который подавался компрессором в один конец трубы

и выходил через другой конец трубы. Расход воздуха замерялся объёмным способом. По длине трубы приблизительно на равных расстояниях было расположено семь манометров для измерения давления воздуха.

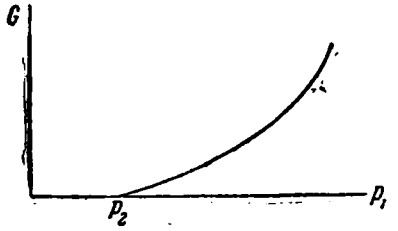
Измерения производились только для установившегося режима движения воздуха.

На фиг. 40 даны графики распределения давления по длине пласта; на этих графиках по оси ординат отложены абсолютные давления в *мм* ртутного столба, а по оси абсцисс — положения манометров (расстояния от начала трубы указаны в метрах).

Предполагая, что движение воздуха происходило по изотермическому закону ($n=1$), мы будем иметь для распределения давления теоретическое уравнение (2.9). В каждом опыте были известны распределение давления по длине пласта и секундный расход воздуха. Вычисляя для каждой опытной кривой значения величин

$$p_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{p_1^2-p_2^2}{L},$$

можно было построить кривую распределения давления по формуле (2.9). Оказалось, что отклонения между параболой (2.9) и опытной кривой во всех случаях были невелики. В таблице 11 даны значения среднего квадратического отклонения для каждого опыта. Мы видим, что оно изменялось от опыта к опыту, составляя при малых давлениях около 1%, а при больших до $4{,}5\%$.



Фиг. 41.

Весовой расход при изотермическом режиме ($n=1$) получаем из формулы (2.10):

$$G=\frac{gkF(p_1^2-p_2^2)}{2\beta L\mu}, \qquad (3.1)$$

где F есть площадь поперечного сечения трубы, g — ускорение силы тяжести. Если считать p_2 постоянным, то, откладывая G по оси ординат, а p_1 — по оси абсцисс, получим параболу расхода (фиг. 41), которая весьма близка к опытной кривой.

Таблица 11. **Значения среднего квадратического отклонения в опытах ГИНИ.**

№№ наблюдений	Начальное давление в *ата*	Средн.квадр. отклонения в %	№№ наблюдений	Начальное давление в *ата*	Средн.квадр. отклонения в %
1	1,154	0,20	21	2,653	1,83
2	1,222	0,33	22	2,729	0,95
3	1,290	0,40	23	2,793	1,72
4	1,358	0,64	24	3,006	1,89
5	1,428	0,35	25	3,055	1,90
6	1,489	0,52	26	3,191	2,44
7	1,568	0,60	27	3,327	2,42
8	1,636	0,54	28	3,463	2,89
9	1,704	1,22	29	3,599	3,35
10	1,778	0,83	30	3,734	2,62
11	1,846	0,72	31	3,877	1,50
12	1,913	0,76	32	3,990	2,53
13	1,981	0,88	33	4,125	3,59
14	2,049	0,72	34	4,262	2,49
15	2,246	1,39	35	4,403	3,39
16	2,314	1,14	36	4,539	4,67
17	2,382	1,24	37	4,695	3,63
18	2,453	1,30	38	4,831	1,29
19	2,517	1,27	39	4,967	3,77
20	2,592	1,06	40	5,103	2,49

§ 4. Сравнение с опытами МГУ.

В 1933 г. в Московском государственном университете МГУ), в гидродинамической лаборатории имени Н. Е. Жуковского была произведена серия опытов над установившимся движением воздуха через трубу диаметром в 10 дюймов и длиной в 15 *м*, наполненную тем же мелким песком, как и в опытах ГИНИ (§ 3). Опыты были произведены студентами МГУ под руководством Д. С. Вилькера. При опытах замерялись:

1) распределение давления воздуха в восьми пунктах ртутными манометрами,

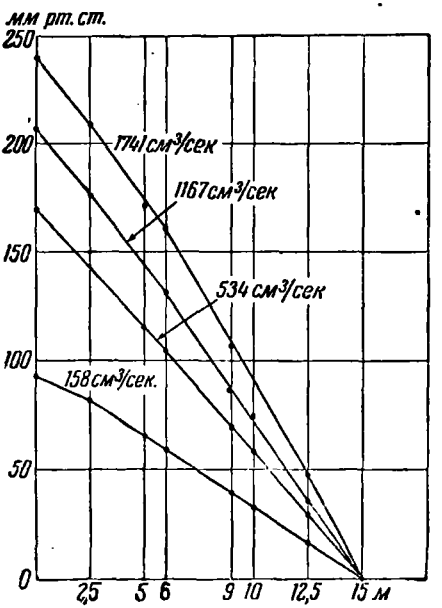
2) расход воздуха — объёмным способом, путём вытеснения воды из газометра.

Таблица 12. Наблюдения над установившимся движением воздуха через песок.

№№ по пор	Начальное избыт. давление в *ат*	Распределение давления по длине пласта в *мм* ртутного столба P_l								Средний секундный расход воздуха *U см³/сек*
		$l_1 = 0$ *м*	$l_2 = 2{,}5$ *м*	$l_3 = 5$ *м*	$l_4 = 6$ *м*	$l_5 = 9$ *м*	$l_6 = 10$ *м*	$l_7 = 12{,}5$ *м*	$l_8 = 15$ *м*	
1	0,952	724	711,5	696	690	670	663	646	630	157,62
2	2,018	1 534	1 511,0	1 484	1 475	1 447	1 440	1 411	1 386	338,52
3	3,011	2 289	2 263,0	2 235	2 224	2 189,5	2 178	2 149	2 120	534,02
4	4,016	3 052,5	3 022,5	2 990	2 978	2 940	2 927	2 897	2 864,5	744,52
5	5,014	3 811	3 780,5	3 744,5	3 731	3 691	3 678,5	3 642,5	3 610,5	954,34
6	6,009	4 567,5	4 537	—	4 492	4 451	4 435	4 396	4 361,5	1 167,14
7	7,011	5 328,5	5 294,5	5 262,5	5 248,5	5 208,5	5 194	5 157,5	5 116,5	1 373,16
8	8,021	6 096	6 059	6 024,5	6 009,5	5 964	5 948	5 910,5	5 864,5	1 570,26
9	9,026	6 840	6 810	6 772	6 762	6 708	—	6 649	6 601	1 740,92

В таблице 12 даны результаты наблюдений для давления одной до девяти избыточных атмосфер.

На фиг. 42 изображены кривые распределения избыточ-го давления по длине пласта, причём на каждой кривой казан расход воздуха в кубических сантиметрах в секунду. оси ординат отложены избыточные (по сравнению с дав-нием на выходном конце) давления в миллиметрах ртутного



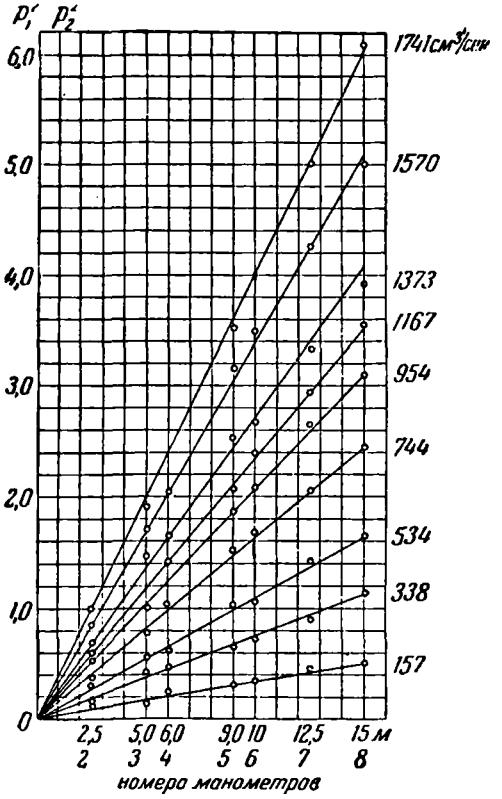
Фиг. 42.

олба. По оси абсцисс отложены положения манометров, езультаты измерений отмечены зачернёнными кружками.

На фиг. 43 на оси абсцисс отмечены положения мано-етров, а на оси ординат отложены для каждого манометра азность квадратов абсолютных давлений (давления измерены *атм*) при входе в трубу и на данном манометре. По-ученные таким образом точки для каждого опыта с оп-еделённым давлением около входа группируются вблизи рямых линий, что согласуется с теоретической формулой (2.9).

Около каждой опытной прямой указан расход воздуха в кубических сантиметрах в секунду.

На фиг. 44 на оси абсцисс отложены значения расхода воздуха в кубических сантиметрах в секунду, а на оси ор-



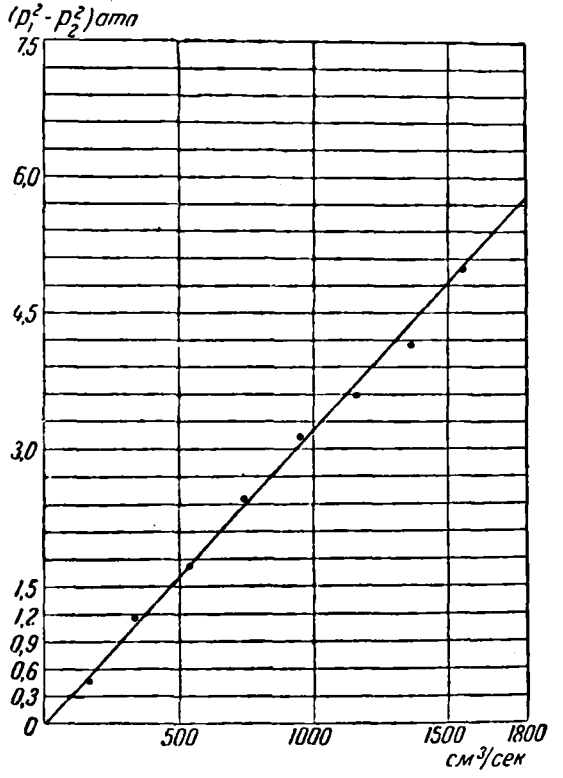
Фиг. 43.

динат — соответствующие разности квадратов абсолютных давлений около входа и выхода из трубы. Полученные точки группируются около прямой линии, что согласуется с теоретической формулой (2.9). Если относить, как везде в этих опытах и вычислениях, объёмный расход воздуха к нормаль-

к давлению 760 *мм* ртутного столба и 15° Ц, то имеем

$$Q = \frac{G}{\gamma_0}, \tag{4.1}$$

γ_0 есть вес единицы объёма воздуха при 15° Ц и 760 *мм*



Фиг. 44.

столба. Тогда из (3.1) и (4.1) получаем

$$Q = \frac{gkF(p_1^2 - p_2^2)}{2\beta L \gamma_0 \mu}. \tag{4.2}$$

ГЛАВА VII.

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Основное уравнение.

В главе II мы вывели уравнение (6.15) для ламинарного движения газа в неизменяемой пористой среде при отсутствии силы тяжести и при постоянных значениях μ и k.

Введём вместо q величину

$$P = p^{\frac{n+1}{n}}, \tag{1.1}$$

тогда по формуле (6.12) главы II получим

$$q = \frac{n}{\beta(n+1)} P. \tag{1.2}$$

Внося (1.2) в уравнение (6.15) главы II, мы получим основное уравнение для определения P:

$$\nabla^2 P = \frac{m\mu}{nk} P^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Компоненты скорости фильтрации согласно формулам (2.2) и (6.1) главы II будут:

$$\left.\begin{aligned} \rho u &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho v &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \rho w &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

десь ρ определяется из уравнения политропы

$$\beta\rho = p^{\frac{1}{n}}, \tag{1.5}$$

оторое после замены p через P, согласно формуле (1.1), ринимает вид

$$\beta\rho = P^{\frac{1}{n+1}}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.3) есть нелинейное уравнение второго по-ядка с частными производными параболического типа. Его нтегрирование при заданных граничных и начальном условиях редставляет значительные трудности.

§ 2. Первое частное решение.

Уравнение (1.3) мы можем переписать в виде

$$\omega\nabla^2\left(p^{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{\partial p}{\partial t}^{\frac{1}{n}}, \tag{2.1}$$

где введено обозначение

$$\omega = \frac{kn}{\mu m(n+1)}. \tag{2.2}$$

Будем искать интеграл уравнения (2.1) в общепринятой форме

$$p = f(x, y, z)\varphi(t). \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), мы получим

$$\omega\varphi^{1+\frac{1}{n}}\nabla^2\left(f^{1+\frac{1}{n}}\right) = f^{\frac{1}{n}}\frac{\partial(\varphi)}{\partial t}^{\frac{1}{n}}.$$

После разделения переменных мы получим в одной части уравнения выражение, зависящее только от координат, а в другой части — выражение, зависящее только от времени. Поэтому каждое из этих выражений должно равняться

постоянной величине. Обозначая её через $-\lambda\omega$, мы получим

$$\frac{\omega}{f^{\frac{1}{n}}}\nabla^2\left(f^{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{\frac{\partial(\varphi)^{\frac{1}{n}}}{\partial t}}{\varphi^{1+\frac{1}{n}}}=-\lambda\omega=\text{const.}$$

Отсюда получаем два дифференциальных уравнения:

$$\nabla^2\left(f^{1+\frac{1}{n}}\right)+\lambda f^{\frac{1}{n}}=0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d\left(\varphi^{\frac{1}{n}}\right)}{\varphi^{1+\frac{1}{n}}}=-\lambda\omega\,dt. \tag{2.5}$$

Для интегрирования уравнения (2.5) делаем подстановку

$$\varphi=x^n, \tag{2.6}$$

вследствие чего (2.5) примет вид

$$\frac{dx}{x^{n+1}}=-\lambda\omega\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x^{-n}=\lambda\omega nt+\text{const.}$$

Следовательно, интегралом уравнения (2.5) будет

$$\varphi(t)=\frac{1}{\text{const.}+\lambda\omega nt}. \tag{2.7}$$

Если принять, что

$$\varphi(t)=1$$

для $t=0$, то получим

$$\text{const.}=1 \tag{2.8}$$

и интеграл (2.7) примет вид

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+\lambda\omega nt}. \tag{2.9}$$

Внося (2.9) в (2.3), мы получим

$$p=\frac{f(x,\,y,\,z)}{1+\lambda\omega nt}. \tag{2.10}$$

Теперь легко установить то условие, при котором возможно решение в виде (2.3). Если положить в (2.10) $t=0$, то получим

$$p=f(x, y, z). \tag{2.11}$$

Это значит, что точное решение (2.3) уравнения (2.1) возможно только в форме (2.10) и отвечает начальному условию

$$p=f(x, y, z) \text{ при } t=0. \tag{2.12}$$

Следовательно, это точное частное решение негодно для удовлетворения произвольных граничных условий и произвольного начального условия.

Уравнение (2.4) легко может быть проинтегрировано для $n=1$, что и было сделано Буссинеском для одномерного движения. В общем случае интегрирование этого уравнения при заданных граничных условиях представляет нелёгкую задачу, так как это есть нелинейное уравнение с частными производными второго порядка.

§ 3. Второе частное решение.

Уравнение (1.3) мы можем представить в виде

$$\nabla^2 P = DP^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{3.1}$$

где введено обозначение

$$D=\frac{m\mu}{nk}. \tag{3.2}$$

Будем искать интеграл уравнения (3.1) в форме

$$P=P(\theta), \tag{3.3}$$

где

$$\theta=\frac{\varphi(x, y, z)}{t}, \tag{3.4}$$

причём $\varphi(x, y, z)$ есть искомая функция. Чтобы найти аналитическую форму зависимости P от аргумента θ, подставим (3.3) в (3.1), что приводит, если использовать обозначения (6.12) и (6.14) главы IV, к уравнению

$$\nabla^2 P = \frac{d^2P}{d\theta^2}\Delta_1\theta + \frac{dP}{d\theta}\nabla^2\theta, \tag{3.5}$$

причём

$$\Delta_1\theta = \frac{\Delta_1\varphi}{t^2}, \qquad \nabla^2\theta = \frac{1}{t}\nabla^2\varphi. \tag{3.6}$$

Внося (3.6) в (3.5), получим

$$\nabla^2 P = \frac{d^2P}{d\theta^2}\frac{\Delta_1\varphi}{t^2} + \frac{dP}{d\theta}\frac{\nabla^2\varphi}{t}. \tag{3.7}$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{dP}{d\theta}\frac{\varphi}{t^2}. \tag{3.8}$$

Внося (3.7) и (3.8) в (3.1), получим

$$\frac{d^2P}{d\theta^2}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}\right) + \frac{1}{\theta}\frac{dP}{d\theta}\nabla^2\varphi + DP^{-\frac{n}{n+1}}\frac{dP}{d\theta} = 0. \tag{3.9}$$

Для решения этого уравнения, пользуясь произвольностью функции φ, примем

$$\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi} = \text{const.}, \quad \nabla^2\varphi = \text{const.}; \tag{3.10}$$

тогда уравнение (3.8) будет зависеть только от одного переменного θ.

Мы удовлетворим системе (3.10), положив

$$\varphi = C(x^2 + y^2 + z^2) = Cr^2, \tag{3.11}$$

где C подлежит определению. Подставляя (3.11) в (3.10), будем иметь

$$\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi} = 4C, \quad \nabla^2\varphi = 6C. \tag{3.12}$$

Внося (3.12) в (3.9), получим уравнение для определения $P(\theta)$:

$$4\frac{d^2P}{d\theta^2} + \left(\frac{6}{\theta} + \frac{D}{CP^{\frac{n}{n+1}}}\right)\frac{dP}{d\theta} = 0. \tag{3.13}$$

Это уравнение имеет тривиальный интеграл

$$P = \text{const.} = C_1 \tag{3.14}$$

и частное решение вида

$$P = C_2 t^{\alpha}, \tag{3.15}$$

где C_2 и α определяются после подстановки (3.15) в (3.13), что даёт

$$\alpha = \frac{n+1}{n}, \tag{3.16}$$

$$C_2 = \left[-\frac{Dn}{(6n+4)C} \right]^{\frac{n+1}{n}}. \tag{3.17}$$

Внося (3.17), (3.4), (3.11) в (3.15), мы получим

$$P = \left[-\frac{Dnr^2}{(6n+4)t} \right]^{\frac{n+1}{n}}, \tag{3.18}$$

и так как на основании (1.1)

$$P = p^{\frac{n+1}{n}},$$

то имеем частный интеграл уравнения (3.1) в виде

$$p = -\frac{Dnr^2}{(6n+4)t}. \tag{3.19}$$

Оба найденных здесь частных решения для случая $n = 1$ совпадают с решениями, которые нашёл Буссинеск, решая задачу о неустановившемся движении неглубокой грунтовой воды (см. главу X, § 1).

§ 4. Приближённое интегрирование основного уравнения (3.1) для одномерного движения.

Так как основное уравнение (3.1) нелинейное, то, с целью приближённого интегрирования, мы подвергнем его линеаризации. Прежде всего заметим, что на основании (1.1) мы имеем

$$P^{\frac{n}{n+1}} = p. \tag{4.1}$$

Поэтому уравнение (3.1) принимает вид

$$\nabla^2 P = \frac{D}{p} \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{4.2}$$

С целью линеаризации этого уравнения можно сделать различные гипотезы относительно величины гидродинамического давления p, стоящего в правой части уравнения. Рассмотрим три такие гипотезы.

1) Можно положить, что

$$p = p_3 = \text{const.}, \tag{4.3}$$

причём значение постоянной p_3 задаётся из физических соображений. Тогда мы получим приближённое уравнение

$$\nabla^2 P = \frac{D}{p_3}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{4.4}$$

совпадающее с обычным уравнением теплопроводности.

2) Мы можем в некоторых случаях приближённо принять, что

$$\frac{1}{p} = A + \frac{F(x, y, z)}{f(t)}, \tag{4.5}$$

где постоянная A и функции $f(t)$ и $F(x, y, z)$ заданы наперёд из физических соображений. Внося (4.5) в (4.2), мы получим приближённое уравнение

$$\nabla^2 P = D\left[A + \frac{F(x, y, z)}{f(t)}\right]\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{4.6}$$

3) Мы можем принять

$$p = p_0 \delta(t), \tag{4.7}$$

где $\delta(t)$ есть заданная функция. И в этом случае уравнение (4.2) примет вид обычного уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 P = \frac{D}{p_0}\frac{\partial P}{\partial \tau}, \tag{4.8}$$

где введено обозначение

$$\tau = \int_0^t \delta(t)\, dt. \tag{4.9}$$

Очевидно, $\tau = 0$ при $t = 0$.

Рассмотрим теперь неустановившееся движение газа в призматическом пласте и будем предполагать, что движение газа совершается в направлении, параллельном оси пласта, которую мы примем за ось Ox. Если начало координат взять

на одной стороне пласта, то уравнение другой стороны пласта будет

$$x = L,$$

где L есть длина пласта.

Граничные условия здесь состоят в том, что даны условия относительно давления газа в обоих сечениях пласта. Условия эти могут быть разнообразного характера. Мы будем принимать следующие гриничные условия:

А) Сечение пласта $x = L$ непроницаемо для газа (так называемая закрытая сторона), вследствие чего скорость фильтрации газа по нормали к стенке, т. е. по оси Ox, равна нулю; тогда согласно (1.4) имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{для} \quad x = L. \tag{4.10}$$

В) Сечение пласта $x = 0$ открыто для истечения газа во внешнюю среду (открытая сторона). Здесь возможны разные случаи:

а) На открытом сечении пласта задано постоянное давление p_2, что приводит к условию

$$P = P_2 = p_2^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{для} \quad x = 0. \tag{4.11}$$

b) На открытом сечении пласта происходит истечение в область постоянного давления по закону теории теплопроводности

$$\frac{\partial P}{\partial x} = h'(P - P_2) \quad \text{для} \quad x = 0, \tag{4.12}$$

причём h' есть некоторая постоянная, характеризующая условия истечения газа из пласта.

с) На открытом сечении пласта давление p_2 есть некоторая функция времени, что приводит к условию

$$P_2 = \varphi_2(t) \quad \text{для} \quad x = 0. \tag{4.13}$$

Кроме условий А) и В), должно быть задано распределение давления в пласте в начальный момент времени $t = 0$. Следовательно, для значения, заключённого в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant L,$$

имеем

$$p = f_2(x) \quad \text{для} \quad t = 0, \tag{4.14}$$

чему отвечает начальное условие

$$P = P_0 = f_1(x) \quad \text{для} \quad t = 0, \tag{4.15}$$

причём

$$f_1(x) = [f_2(x)]^{1+\frac{1}{n}} \tag{4.16}$$

§ 5. Приближённое интегрирование уравнения одномерного движения при постоянном начальном давлении по всей длине пласта.

В этом случае имеем начальное условие в следующем виде:

$$p = p_0 \quad \text{для} \quad t = 0 \tag{5.1}$$

для всех значений x в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant L; \tag{5.1'}$$

поэтому начальное условие (4.15) принимает вид

$$P = P_0 = p_0^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{для} \quad t = 0 \tag{5.2}$$

в интервале (5.1').

Предположим, что

$$p_3 = p_0; \tag{5.3}$$

тогда уравнение (4.4) примет вид

$$\nabla^2 P = \frac{m\mu}{nkp_0} \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) есть обычное уравнение теплопроводности, которое интегрируется по методу Фурье при начальном условии (5.2) и граничных условиях (4.10) и (4.11). Интеграл этого уравнения имеет вид

$$P = P_2 + \frac{4}{\pi}(P_0 - P_2) \sum_i \frac{1}{i} e^{-\varepsilon i^2 t} \sin \frac{i\pi x}{2L}, \tag{5.5}$$

где сумма распространяется на все целые нечётные значения i от единицы до бесконечности, а постоянная ε опреде-

ляется формулой

$$\varepsilon = \frac{nkp_0\pi^2}{4m\mu L^2}. \tag{5.6}$$

Решение (5.5) получается по методу частных решений, путём использования известной формулы

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{l=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty}{}' \frac{1}{l} \sin \frac{l\pi x}{2}, \tag{5.7}$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Введём обозначения

$$q = e^{-4\varepsilon t}, \tag{5.8}$$

$$\varphi(x, q) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} q^{\frac{n^2}{4}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{n}, \tag{5.9}$$

причём для $t \geqslant 0$ имеем

$$0 < q \leqslant 1. \tag{5.10}$$

При этих обозначениях решение (5.5) примет вид

$$\frac{P - P_2}{P_0 - P_2} = \varphi\left(\frac{x}{L}, q\right). \tag{5.11}$$

У закрытого конца пласта ($x = L$) давление газа p_1 будет функцией одного только времени t; здесь имеем

$$P_1 = p_1^{\frac{n+1}{n}}. \tag{5.12}$$

Следовательно, P_1 есть функция тоже одного только времени t:

$$P_1 = P_1^{\cdot}(t). \tag{5.13}$$

Для определения P_1 мы должны в равенстве (5.11) положить $x = L$, что приводит к важному соотношению

$$\frac{P_1 - P_2}{P_0 - P_2} = \varphi(1, q). \tag{5.14}$$

Если отказаться от гипотезы, выраженной равенством (5.3), то решение уравнения (4.4) будет иметь попрежнему вид

(5.5) или (5.11), но вместо ранее указанного значения ε [формула (5.6)] будем иметь новое значение ε_1, определяемое формулой, аналогичной (5.6):

$$\varepsilon_1 = \frac{nkp_3\pi^2}{4m\mu L^2}. \tag{5.15}$$

Поэтому вместо (5.8) мы будем иметь

$$q_1 = e^{-4\varepsilon_1 t}; \tag{5.16}$$

q_1 надо внести вместо q в решение (5.11).

§ 6. Второе приближение.

Полученное решение (5.5) или (5.11) мы можем рассматривать как первое приближение и, определив отсюда p, внести его в правую часть уравнения (4.2) и затем вновь интегрировать полученное уравнение. Это даст второе приближение. Ввиду громоздкости этих вычислений мы примем в качестве второго приближения для p формулу (4.7), причём выберем функцию $\delta(t)$ в виде

$$\delta(t) = \frac{p_2}{p_0} + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) e^{-\beta t}, \tag{6.1}$$

где

$$\beta = \frac{\varepsilon n}{n+1}. \tag{6.2}$$

Из равенств (4.7) и (6.1) следует, что

$$p = p_2 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

как и должно быть к концу процесса истечения газа из пласта, когда давление газа в пласте будет стремиться сравняться с внешним давлением p_2, имеющим место у открытого конца пласта.

При $t = 0$ имеем из (6.1):

$$\delta(0) = 1.$$

Внося это значение в (4.7), получим начальное условие

$$p = p_0.$$

Если давление p_2 очень мало по сравнению с давлением p_0, то для давления у закрытого конца пласта мы имеем приближённо из (5.5), ограничиваясь первым членом суммы,

$$\frac{p_1}{p_0} = C' e^{-\alpha t}, \tag{6.3}$$

где C' близко к единице. Возводя обе части (6.3) в степень $\frac{n}{n+1}$, мы получим

$$\frac{p_1}{p_0} = C'' e^{-\frac{\alpha n t}{n+1}}, \tag{6.4}$$

где C'' тоже близко к единице.

Из равенств (4.7) и (6.1) мы имеем при p_2, очень малом по сравнению с p_0, соотношение

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\beta t} \tag{6.5}$$

Сравнивая (6.4) и (6.5) и считая $p = p_1$, мы найдём

$$C'' = 1. \tag{6.6}$$

Поэтому, сопоставляя формулы (4.7) и (6.1), мы имеем при p_2, очень малом по сравнению с p_0, давление p_1, выраженное формулой (6.5).

Таким образом, наше второе приближение состоит в том, что мы заменяем p в уравнении (4.2) через p_1, т. е. давлением у закрытого конца пласта, и определяем его по приближённой формуле

$$p_1 = p_0 \delta(t), \tag{6.7}$$

где $\delta(t)$ имеет значение (6.1).

Внося $\delta(t)$ в (4.9), мы получим для нового переменного τ, входящего в уравнение (4.8), выражение

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}. \tag{6.8}$$

Очевидно,

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{6.9}$$

Так как уравнение (4.8) отличается от уравнения (5.4) только тем, что вместо t в него входит τ, то решение этого уравнения, отвечающее начальному условию (5.1) и граничным условиям (4.10) и (4.11), будет дано равенством (5.11),

но с иным значением q. Следовательно, мы имеем

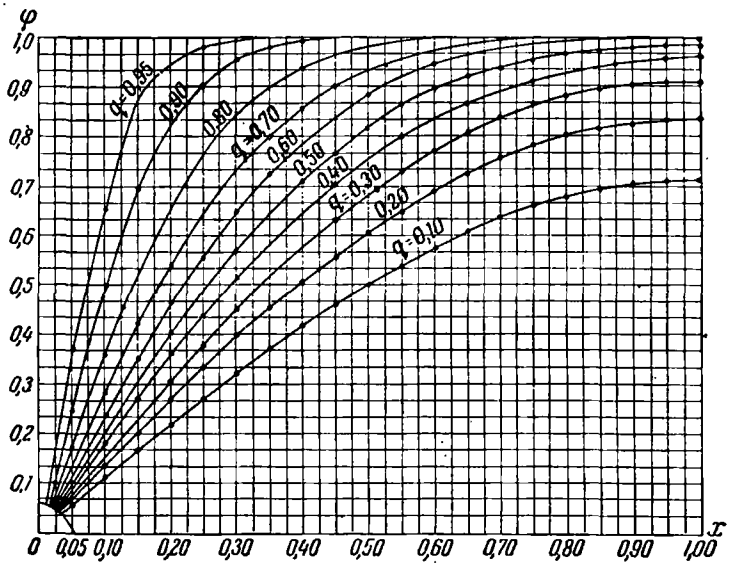
$$\frac{P-P_2}{P_0-P_2}=\varphi\left(\frac{x}{L},\ q_2\right), \tag{6.10}$$

причём q_2 определяется по формуле, аналогичной (5.8):

$$q_2=e^{-4\varepsilon t}. \tag{6.11}$$

§ 7. Исследование функции $\varphi(x, q)$.

В § 5 мы ввели функцию двух аргументов $\varphi(x, q)$, заданную уравнением (5.9). Аргумент q определяется форму-



Фиг. 45.

лой (5.8) и должен представлять собой безразмерное число. В самом деле, подставляя в равенство (5.6) размерности входящих в него величин, мы найдём, что размерность ε равна $сек^{-1}$, следовательно, размерность произведения εt, а вместе с тем и величины $e^{-4\varepsilon t}$, равны нулю.

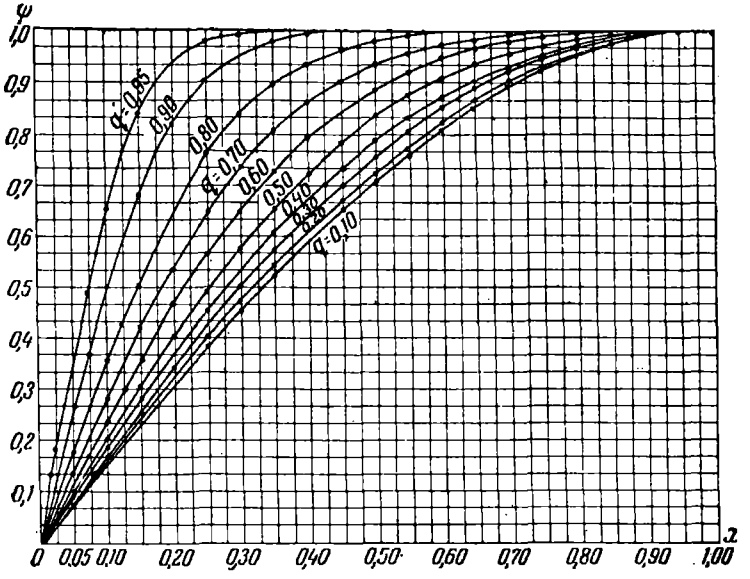
В таблице 13 даны значения функции $\varphi(x, q)$ для значений x, заключённых в интервале

$$0<x\leqslant 1$$

и при изменении q в интервале

$$0 < q \leqslant 1.$$

На фиг. 45 изображён график этой функции при изменении x и q в указанных интервалах.



Фиг. 46.

Введём теперь новую функцию $\psi(x, q)$, определяемую равенством

$$\psi(x, q) = \frac{\varphi(x, q)}{\varphi(1, q)}. \qquad (7.1)$$

В таблице 14 даны значения этой функции для значений x, заключённых в интервале

$$0 < x \leqslant 1$$

и при изменении q в интервале

$$0 < q \leqslant 1.$$

На фиг. 46 изображён график этой функции.

Таблица 13. **Значения функции $\varphi(x, q)$.**

x \ q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,00
0,05	0,056729	0,069464	0,080582	0,092361	0,106083	0,123341	0,147163	0,184984	0,265785	0,366803	1,000000
0,10	0,113081	0,138362	0,160339	0,183512	0,210394	0,244049	0,290103	0,361520	0,506209	0,669460	1,000000
0,15	0,168683	0,206155	0,238462	0,272229	0,311015	0,358932	0,423135	0,519463	0,695426	0,862722	1,000000
0,16	0,179682	0,219535	0,253828	0,289585	0,330560	0,381013	0,448275	0,548311	0,729235	0,902256	1,000000
0,20	0,223169	0,272313	0,314202	0,357434	0,406413	0,465804	0,543076	0,653097	0,829115	0,956049	1,000000
0,25	0,276184	0,336334	0,386851	0,438171	0,495272	0,562854	0,647568	0,760174	0,912909	0,985963	1,000000
0,30	0,327388	0,397764	0,455821	0,513541	0,576557	0,648884	0,735517	0,841757	0,959980	0,991853	1,000000
0,32	0,347202	0,421519	0,482262	0,542214	0,603798	0,680066	0,766057	0,867814	0,971400	0,993225	1,000000
0,35	0,376459	0,456190	0,520596	0,583232	0,649577	0,723179	0,806647	0,900758	0,981431	0,993422	1,000000
0,40	0,423000	0,511399	0,580771	0,646558	0,714143	0,786216	0,863239	0,940202	0,993840	0,994400	1,000000
0,45	0,467002	0,562621	0,636046	0,703378	0,770150	0,838224	0,906260	0,966647	0,999897	0,995000	1,000000
0,50	0,507936	0,610051	0,695085	0,753622	0,817774	0,879813	0,937112	0,991159	0,999375	0,996000	1,000000
0,55	0,545654	0,653353	0,731320	0,798210	0,860760	0,922355	0,959230	0,991361	0,999734	0,997309	1,000000
0,60	0,579947	0,692318	0,771093	0,835906	0,893771	0,948228	0,974303	0,995289	0,999930	0,996672	1,000000
0,65	0,610629	0,726842	0,805692	0,867628	0,919922	0,966000	0,984372	0,997825	0,999900	0,999841	1,000000
0,68	0,627236	0,743586	0,825880	0,883293	0,929958	0,965392	0,988565	0,998561	0,999900	0,999900	1,000000
0,70	0,637537	0,756823	0,835102	0,893205	0,937685	0,970358	0,990779	0,999067	0,999900	0,999900	1,000000
0,75	0,660532	0,782253	0,859727	0,914555	0,953828	0,980293	0,995134	0,999561	0,999900	0,999900	1,000000
0,80	0,679500	0,803072	0,879588	0,931305	0,965844	0,985900	0,997100	0,999893	0,999737	0,999908	1,000000
0,84	0,681710	0,816400	0,872155	0,941683	0,973021	0,990645	0,998237	0,999982	0,999969	0,999953	1,000000
0,85	0,694347	0,819269	0,874841	0,943869	0,974474	0,991241	0,998148	0,999981	0,999955	0,999972	1,000000
0,90	0,705002	0,830836	0,905628	0,952609	0,980337	0,994204	0,999155	1,000000	0,999992	1,000000	1,000000
0,95	0,710487	0,836672	0,910831	0,956426	0,982271	0,994178	0,997983	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,00	0,713557	0,840091	0,914769	0,959472	0,984755	0,996217	0,999591	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Таблица 14. **Значения функции** $\psi(x, q) = \frac{\varphi(x, q)}{\varphi(1, q)}$.

x \ q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,00
0,05	0,079502	0,082686	0,089064	0,096266	0,107725	0,123809	0,147223	0,184973	0,265780	0,365724	1,000000
0,10	0,158475	0,164699	0,177216	0,191271	0,213651	0,244975	0,290222	0,361498	0,506200	0,667491	1,000000
0,15	0,236398	0,245396	0,263561	0,283740	0,315830	0,360296	0,423309	0,519432	0,695414	0,860185	1,000000
0,16	0,251811	0,261323	0,280545	0,301829	0,335677	0,382460	0,448459	0,548279	0,729222	0,899602	1,000000
0,20	0,312756	0,324147	0,347274	0,372548	0,412704	0,467573	0,543298	0,653059	0,829101	0,953238	1,000000
0,25	0,387053	0,400354	0,427569	0,456698	0,502939	0,564952	0,647833	0,760129	0,912893	0,983063	1,000000
0,30	0,458811	0,473478	0,503790	0,535255	0,585482	0,651349	0,735818	0,841707	0,959964	0,988936	1,000000
0,32	0,486706	0,501754	0,533023	0,565141	0,616191	0,682648	0,766370	0,867763	0,971383	0,990304	1,000000
0,35	0,527580	0,543025	0,575391	0,607893	0,659632	0,725925	0,806947	0,900705	0,981414	0,990501	1,000000
0,40	0,592931	0,608743	0,641900	0,673897	0,725198	0,789202	0,863583	0,940146	0,993823	0,998988	1,000000
0,45	0,654471	0,669714	0,702993	0,733119	0,782073	0,841407	0,906631	0,966589	0,998880	0,999400	1,000000
0,50	0,711837	0,726173	0,768246	0,785488	0,830434	0,883154	0,937496	0,981100	0,999358	0,999700	1,000000
0,55	0,764697	0,777687	0,808296	0,831962	0,874085	0,925858	0,959622	0,990303	0,999717	0,999700	1,000000
0,60	0,812756	0,824098	0,852258	0,871251	0,907607	0,951830	0,974762	0,995230	0,999913	0,999900	1,000000
0,65	0,855754	0,865194	0,890484	0,904314	0,934163	0,969669	0,984775	0,997766	0,999989	0,999900	1,000000
0,68	0,879028	0,887154	0,910598	0,920642	0,944550	0,969858	0,988969	0,998502	0,999990	0,999956	1,000000
0,70	0,893464	0,900883	0,923001	0,930973	0,952202	0,974043	0,991184	0,999008	0,999990	1,000000	1,000000
0,75	0,925689	0,931152	0,950218	0,953226	0,968594	0,984016	0,995541	0,999502	0,999990	1,000000	1,000000
0,80	0,952272	0,955935	0,972169	0,970683	0,980796	0,990648	0,997508	0,999834	0,999990	1,000000	1,000000
0,84	0,969384	0,971800	0,986058	0,981500	0,988095	0,994407	0,998645	0,999923	0,999992	1,000000	1,000000
0,85	0,973079	0,975214	0,989028	0,986000	0,989560	0,995006	0,998756	0,999922	1,000000	1,000000	1,000000
0,90	0,988011	0,988983	1,000000	0,992888	0,995514	0,997980	0,999563	0,999980	1,000000	1,000000	1,000000
0,95	0,995698	0,995930	1,000000	0,996867	0,997478	0,997984	0,999900	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,00	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Если (5.11) разделить на (5.14), то, пользуясь обозначением (7.1), мы получим

$$\frac{P-P_2}{P_1-P_2}=\psi\left(\frac{x}{L},\ q\right), \tag{7.2}$$

где

$$0<x\leqslant L,\quad 0<q\leqslant 1.$$

С помощью таблиц 13 и 14 и фиг. 45 и 46 можно составить себе ясную картину характера изменения давления газа как по длине пласта в какой-либо момент времени, так и в данном месте пласта с изменением времени.

§ 8. Дебит пласта.

Дебитом пласта мы будем называть массу газа, истекающего из единицы площади пласта в единицу времени. Обозначим его через G. Величина дебита вычисляется при помощи первого равенства системы (1.4), взятого для открытого конца пласта, т. е. для $x=0$. Это даёт

$$G=-\frac{kn}{\beta(n+1)\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{8.1}$$

Внося сюда P из равенства (6.10), мы получим

$$G=\frac{kn(P_0-P_2)}{\mu\beta(n+1)L}\vartheta_2(q_2), \tag{8.2}$$

где введено обозначение

$$\vartheta_2(q_2)=2\left(q_2^{\frac{1}{4}}+q_2^{\frac{9}{4}}+q_2^{\frac{25}{4}}+\ldots\right). \tag{8.3}$$

Этот ряд встречается в теории эллиптических функций, и Якоби, один из творцов теории эллиптических функций, ввёл в анализ четыре основных функции ϑ. Согласно определению Якоби,

$$\vartheta_2(x,\ q)=2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi x+\ldots\ ^*). \tag{8.4}$$

---

*) См., например, Jahnke und Emde, Funktionentafeln. Springer. Berlin.

Если q_2 мало, то ряд (8.3) сходится очень быстро; если же q_2 близко к единице, то сходимость ряда весьма слабая. Но Якоби дал формулу преобразования, которая в рассматриваемом случае даёт [1])

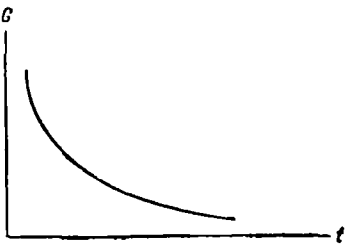
$$\vartheta_2(q_2) = \sqrt{\frac{\pi}{4\varepsilon\tau}}\left[1 - 2q_4 + 2q_4^4 - 2q_4^9 + \ldots\right], \qquad (8.5)$$

где введено обозначение

$$q_4 = e^{-\frac{\pi^2}{4\varepsilon\tau}}. \qquad (8.6)$$

При малых значениях времени t, когда q_2 близко к единице, значения q_4 получаются очень малыми, вследствие чего ряд (8.5) сходится очень быстро и вычисление $\vartheta_2(q_2)$ производится легко.

Если откладывать по оси абсцисс время t, а по оси ординат — весовой расход газа G (фиг. 47), то получим *кривую истощения*, имеющую ось ординат в качестве асимптоты. Уравнение кривой истощения можно получить из равенства (8.2). В самом деле, мы имеем



Фиг. 47.

$$G_1 = Gg = \frac{kn\,\varepsilon(P_0 - P_2)}{\mu\beta(n+1)L}\,\vartheta_2(q_2). \qquad (8.7)$$

Для очень малых значений t, вблизи момента начала истечения, в равенстве (8.5) достаточно ограничиться первым членом разложения $\vartheta_2(q)$, т. е. принять

$$\vartheta_2(q_2) = \sqrt{\frac{\pi}{4\varepsilon\tau}}. \qquad (8.8)$$

Но в этом случае мы должны принять

$$\tau = t.$$

[1]) См., например, Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, перев. с английского.

Внося (8.8) в (8.7), мы получим

$$G_1 = \frac{P_0 - P_2}{\beta (n+1)} \sqrt{\frac{knm}{\mu \pi p_0 t}}. \tag{8.9}$$

Полное весовое количество газа, вытекающее из пласта с момента начала истечения за промежуток времени t, будет равно

$$\overline{G} = \int_0^t G_1 dt. \tag{8.10}$$

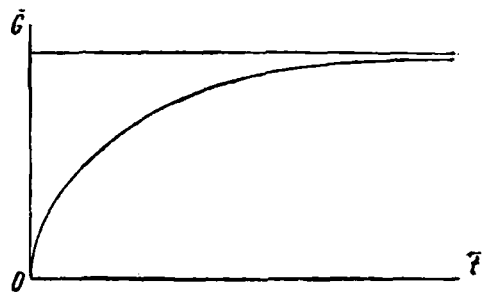
Внося сюда (8.9), мы получим для *небольшого промежутка времени* t:

$$\overline{G} = \frac{P_0 - P_2}{\beta (n+1)} \sqrt{\frac{knm}{\mu \pi p_0}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{8.11}$$

откуда

$$\overline{G} = \frac{2(P_0 - P_2)}{\beta (n+1)} \sqrt{\frac{knmt}{\mu \pi p_0}}. \tag{8.12}$$

Если наносить время t на оси абсцисс, а полное весовое количество истекшего газа — на оси ординат, то получим



Фиг. 48.

так называемую *кривую суммарной добычи пласта* (фиг. 48). Из (8.12) следует, что вблизи начала координат эта кривая суммарной добычи близка по своему виду к обыкновенной параболе второй степени, имеющей ось ординат в качестве касательной в начале координат.

§ 9. Неустановившееся движение газа в двух измерениях.

Если пласт, в котором находится газ, имеет небольшую толщину, будучи закрыт сверху и снизу непроницаемыми горизонтальными слоями, а перфорированная труба скважины проходит через всю толщину его, то влиянием силы тяжести можно пренебречь, и движение газа следует рассматривать как двухмерное. Совместим плоскость Oxy с нижним горизонтальным основанием пласта, а ось z направим вертикально вверх. Толщину пласта обозначим через h. Тогда уравнение (4.2) примет вид

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{D}{p}\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{9.1}$$

Компоненты скорости фильтрации будут

$$\left.\begin{aligned} \rho u &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu}\frac{dP}{\partial x}, \\ \rho v &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu}\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Следовательно, весовое количество газа, проходящее за единицу времени внутрь скважины с круговым сечением радиуса $r = b$, т. е. весовой дебит скважины G будет равен

$$G = \frac{knhg}{\beta(n+1)\mu}\oint \frac{\partial P}{\partial r}\,ds. \tag{9.3}$$

Интеграл должен быть взят по окружности скважины, элемент которой обозначен через ds, а радиус-вектор проведён из центра окружности, представляющей контур скважины.

В дальнейшем будем предполагать, что начальное давление газа в пласте всюду одинаково и равно p_0, а давление p в правой части уравнения (9.1) определяется равенствами (4.7) и (6.1). Тогда, вводя вместо t новое переменное τ согласно формуле (6.8), мы приведём уравнение (9.1) к виду

$$\nabla^2 P = \frac{D}{p_0}\frac{\partial P}{\partial \tau}. \tag{9.4}$$

При его интегрировании мы должны выполнить следующие условия:

А) Начальное условие

$$P = P_0 = p_0^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{при } \tau = 0. \tag{9.5}$$

В) Граничные условия:

1) На контуре скважины $s\,(r = b)$:

а) давление $p = p_2$, что приводит к условию

$$P = P_2 = p_2^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{для} \quad r = b; \tag{9.6}$$

б) истечение происходит в область постоянного давления p, что приводит к условию

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \beta_0 (P - P_2) \quad \text{для} \quad r = b, \tag{9.7}$$

где β_0 — некоторая постоянная, характеризующая условие истечения из пласта в скважину.

2) На внешней границе пласта S_0 имеется непроницаемая для газа граница, вследствие чего скорость фильтрации по нормали к этой границе равна нулю, что выражается условием

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad \text{на контуре} \quad S_0, \tag{9.8}$$

причём производная берётся по нормали к контуру S_0.

§ 10. Случай, когда скважина с круговым контуром находится в центре круговой внешней границы.

Пусть радиус внешней окружности S_0 равен a, радиус концентричной ей внутренней окружности s равен b. Движение газа в рассматриваемом случае симметрично относительно центра обоих кругов. Поэтому целесообразно преобразовать уравнение (9.4) к полярным координатам. Обозначая через r расстояние от центра O, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau}. \tag{10.1}$$

Граничные условия здесь будут:

1) на внешней границе S_0

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = a; \tag{10.2}$$

2) на внутренней границе s

$$P = P_2 \quad \text{для} \quad r = b. \tag{10.3}$$

Интеграл уравнения (10.1) удобно представить в виде

$$P - P_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m f_m(r)\, e^{-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}}, \tag{10.4}$$

где C_1, C_2, C_3, ... суть произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, а функция $f_m(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_m}{dr} + \lambda_m^2 f_m = 0, \tag{10.5}$$

т. е. известному уравнению функций Бесселя нулевого порядка.

Интеграл уравнения (10.5) возьмём в виде

$$f_m(r) = J_0(r\lambda_m) + A_m N_0(r\lambda_m) = Z_0(r\lambda_m), \tag{10.6}$$

где A_m — произвольная постоянная; $J_0(r\lambda_m)$ — функция Бесселя первого вида и нулевого порядка, $N_0(r\lambda_m)$ — функция Бесселя второго вида и нулевого порядка.

Условие (10.2) на внешней границе после внесения в него интеграла (10.6) приводит к уравнению

$$Z_1(a\lambda_m) = J_1(a\lambda_m) + A_m N_1(a\lambda_m) = 0, \tag{10.7}$$

так как, согласно известным соотношениям, имеем

$$\left.\begin{aligned} J_0'(x) &= -J_1(x), \\ N_0'(x) &= -N_1(x), \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

где J_1 есть функция Бесселя первого вида и первого порядка, а N_1 — функция Бесселя второго вида и первого порядка.

Условие (10.3) на внутренней границе после внесения в него интеграла (10.4) и использования соотношения (10.6) приводится к виду

$$J_0(b\lambda_m) + A_m N_0(b\lambda_m) = 0. \tag{10.9}$$

Из уравнений (10.7) и (10.9) мы имеем

$$-A_m = \frac{J_0(b\lambda_m)}{N_0(b\lambda_m)} = \frac{J_1(a\lambda_m)}{N_1(a\lambda_m)}. \tag{10.10}$$

Вводя обозначения

$$\frac{b}{a}=\mu; \quad a\lambda_m = x; \quad b\lambda_m = \mu x, \tag{10.11}$$

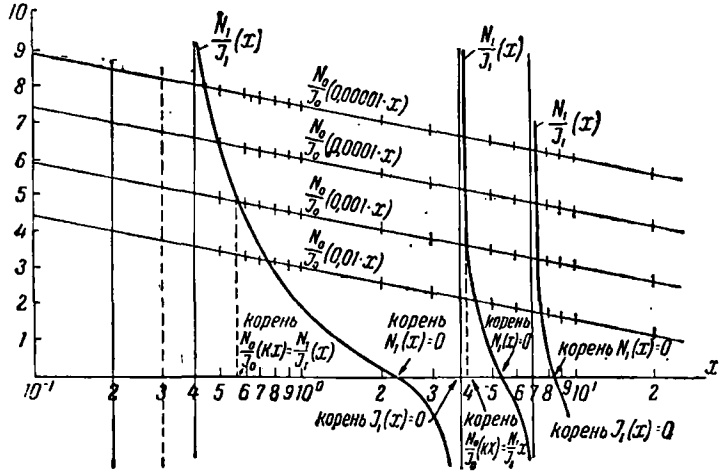
мы получим из (10.10) следующее уравнение для определения x:

$$J_0(\mu x)\,N_1(x) - J_1(x)\,N_0(\mu x) = 0. \tag{10.12}$$

Для заданного значения μ это уравнение имеет бесчисленное множество корней

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots,$$

которым отвечает бесчисленное множество значений параметра λ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots$, что видно наглядно из фиг. 49.



Фиг. 49.

При малых значениях μ мы имеем приближённо

$$J_0(\mu x) = 1; \quad N_0(\mu x) = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{2}{\gamma\mu x}\right)$$

$\left(\ln\frac{2}{\gamma} = 0{,}11593\ldots\right)$. Поэтому для малых значений μ уравнение (10.12) принимает вид

$$\frac{N_1(x)}{J_1(x)} = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{2}{\gamma\mu x}\right). \tag{10.13}$$

Отсюда следует, что при $\mu \to 0$ корни этого уравнения стремятся к корням уравнения

$$J_1(x) = 0,$$

отличаясь от них на некоторую малую, но конечную величину, как это видно из фиг. 49.

Произвольная постоянная A_m, согласно (10.10), будет иметь определённое значение для каждого из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

Для того чтобы удовлетворить начальному условию (9.5), следует в (10.4) положить $\tau = 0$; тогда мы будет иметь

$$P_0 - P_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m f_m(r). \tag{10.14}$$

Но, согласно теории функций Бесселя, мы имеем следующее разложение в ряд:

$$P - P_2 = \\ = -2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) \cdot Z_0(\lambda_m r)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}, \tag{10.15}$$

где r заключено в интервале

$$b \leqslant r \leqslant a$$

и введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} Z_0(\lambda_m r) &= J_0(\lambda_m r) + A_m N_0(\lambda_m r), \\ Z_1(\lambda_m r) &= J_1(\lambda_m r) + A_m N_1(\lambda_m r). \end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

Сравнивая (10.4) и (10.15), находим C_m и затем получим

$$P = P_2 - \\ -2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) \cdot Z_0(\lambda_m r)\, e^{-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}}}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}, \tag{10.17}$$

где использованы обозначения (10.16), а сумма распространяется на все корни трансцендентного уравнения (10.12).

§ 11. Вычисление дебита скважины.

При вычислении весового дебита скважины мы вследствие симметрии имеем

$$\oint \frac{\partial P}{\partial r}\, ds = 2\pi r \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Внося это значение интеграла в равенство (9.3), мы найдём величину весового дебита:

$$G=\frac{2\pi knhg}{\beta(n+1)\mu}\left[r\frac{\partial P}{\partial r}\right]_{r=b}. \tag{11.1}$$

Пусть дано давление p_2 в скважине. Тогда надо внести в (11.1) значение P из равенства (10.17), что даёт

$$G=\frac{4\pi knhg(P_0-P_2)}{\beta(n+1)\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(b\lambda_i)^2Z_1^2(b\lambda_i)\,e^{-\frac{p_0\tau\lambda_i^2}{D}}}{(a\lambda_i)^2Z_0^2(a\lambda_i)-(b\lambda_i)^2Z_1^2(b\lambda_i)}. \tag{11.2}$$

Преобразуем это равенство к более удобному для вычислений виду. Из равенств (10.6) и (10.10) имеем

$$Z_0(a\lambda_i)=-\frac{J_1(a\lambda_i)N_0(a\lambda_i)-J_0(a\lambda_i)N_1(a\lambda_i)}{N_1(a\lambda_i)}. \tag{11.3}$$

Но, согласно известной формуле теории функций Бесселя,

$$J_1(x)\cdot N_0(x)-J_0(x)\cdot N_1(x)=\frac{2}{\pi x}. \tag{11.4}$$

Подставляя это значение в (11.3), мы получим

$$Z_0(a\lambda_i)=-\frac{2}{\pi a\lambda_i}\cdot\frac{1}{N_1(a\lambda_i)}. \tag{11.5}$$

Далее, из (10.16) и (10.10) мы имеем

$$Z_1(b\lambda_i)=\frac{J_1(b\lambda_i)N_0(b\lambda_i)-J_0(b\lambda_i)\cdot N_1(b\lambda_i)}{N_0(b\lambda_i)},$$

или, на основании (11.4),

$$Z_1(b\lambda_i)=\frac{2}{\pi b\lambda_i}\cdot\frac{1}{N_0(b\lambda_i)}. \tag{11.6}$$

Внося (11.5) и (11.6) в (11.2), мы получим

$$G=\frac{2\pi knhg(P_0-P_2)}{\beta(n+1)\mu}\varphi(t), \tag{11.7}$$

где

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}B_ie^{-\frac{p_0\tau\lambda_i^2}{D}},$$

а

$$B_l = \frac{2N_1^2(a\lambda_l)}{N_0^2(b\lambda_l) - N_1^2(a\lambda_l)}. \tag{11.8}$$

Но из равенства (10.10) имеем

$$N_0(b\lambda_l) = N_1(a\lambda_l)\frac{J_0(b\lambda_l)}{J_1(a\lambda_l)}.$$

Внося это значение в (11.8), мы получим

$$B_l = \frac{2J_1^2(a\lambda_l)}{J_0^2(b\lambda_l) - J_1^2(a\lambda_l)}, \tag{11.9}$$

или, если воспользоваться обозначениями (10.11),

$$B_l = \frac{2J_1^2(x_l)}{J_0^2(\mu x_l) - J_1^2(x_l)}. \tag{11.10}$$

Значения коэффициентов B_1, B_2, B_3, ... для разных значений μ даны в таблице 15.

Таблица 15

Значения μ	x_l	Коэффициенты B
0,01	0,7167	0,25420
	4,2899	0,05855
	7,5462	0,04339
	10,7659	0,03746
0,001	0,5687	0,16106
	4,1108	0,02325
	7,3204	0,01568
	10,4986	0,01243
0,0001	0,4857	0,11881
	4,0317	0,01224
	7,2277	0,00779
	10,3955	0,00594
0,00001	0,4308	0,09267
	3,9874	0,00753
	7,1780	0,00461
	10,3415	0,00344

§ 12. Форма интеграла уравнения (9.4) вблизи скважины малого диаметра.

Интеграл уравнения (9.4) можно представить в форме

$$P = P_1(x, y) \cdot e^{-\frac{p_0 \tau \lambda^2}{D}}, \tag{12.1}$$

причём функция $P_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 P_1 + \lambda^2 P_1 = 0. \tag{12.2}$$

Пусть r есть расстояние от центра скважины малого радиуса ρ. Тогда для движения газа вблизи скважины интеграл уравнения (12.2) можно представить в форме

$$P_1 = CN_0(\lambda r) + \psi(x, y), \tag{12.3}$$

где C есть постоянная, подлежащая определению, а $\psi(x, y)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = 0 \tag{12.4}$$

и не имеющая никаких особенностей вблизи контура s, а $N_0(\lambda r)$ есть функция Бесселя нулевого порядка второго вида.

Внесём теперь (12.1) и (12.3) в формулу (9.3) для весового дебита скважины, который здесь является величиной переменной; мы получим

$$G = \frac{knhg}{\beta(n+1)\mu}\left[C\oint \frac{dN_0}{dr}\,ds + \oint \frac{d\psi}{dr}\,ds\right] e^{-\frac{\lambda^2 \tau p_0}{D}}, \tag{12.5}$$

причём оба интеграла следует взять по контуру окружности s. Но для малых значений аргумента имеет место соотношение

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x} + \ldots, \tag{12.6}$$

поэтому для малых значений λr мы имеем приближённо

$$N_0(\lambda r) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\lambda\gamma} + \frac{2}{\pi}\ln r,$$

откуда

$$\frac{dN_0}{dr} = \frac{2}{\pi r}. \tag{12.7}$$

Далее, обозначая через φ полярный угол, имеем

$$ds = r\,d\varphi. \tag{12.8}$$

Внося (12.7) и (12.8) в (12.5), мы получим

$$G(\tau) = \frac{knhg}{\beta(n+1)\mu}\left[C\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{dr}\,r\,d\varphi\right] e^{-\frac{p_0\tau\lambda^2}{D}}. \tag{12.9}$$

Если теперь радиус r неограниченно уменьшать, то второй интеграл в (12.9) будет стремиться к нулю, ибо $\frac{d\psi}{dr}$ имеет конечное значение в области, смежной с контуром s, и на самом контуре. Поэтому мы будем иметь

$$G(\tau) = \frac{4knhC\varrho}{\beta(n+1)\mu} e^{-\frac{p_0\tau\lambda^2}{D}},$$

откуда

$$C = \frac{\beta(n+1)\mu}{4knhg}\,G(\tau)\,e^{\frac{p_0\tau\lambda^2}{D}}$$

Внося это значение C в (12.1) и (12.3), мы найдём интеграл уравнения (9.4) вблизи скважины s:

$$P = \frac{\beta(n+1)\mu}{4knhg}\,G(\tau)\,N_0(\lambda r) + \psi(x, y)\,e^{-\frac{p_0\tau\lambda^2}{D}}. \tag{12.10}$$

ГЛАВА VIII.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПЕСКЕ.

§ 1. Опыты ГИНИ в 1928 г.

Опыты над неустановившимся движением газа в песках и песках с примесью глины производились главным образом в СССР, в лабораториях Московского государственного университета (МГУ) и ныне закрытого Государственного исследовательского нефтяного института (ГИНИ).

Опыты в ГИНИ были произведены Д. С. Вилькером и И. П. Москальковым на пласте, изображённом на фиг. 39, и состояли в наблюдении за истечением воздуха из трубы, описанной в главе V и заполненной тем же песком. Перед началом каждого опыта по всей трубе устанавливалось одно и то же давление, затем открывался кран на одном конце трубы (другой оставался закрытым) и замерялись: 1) давления в шести местах, где были поставлены манометры, приблизительно равноотстоящие друг от друга; 2) расход воздуха, вытекавшего в газгольдер под переменным (хотя и в малой степени) давлением.

Обработка наблюдений велась по формулам главы VII в предположении изотермического режима, т. е. для $n=1$. Распределение давления вычислялось по формуле (6.10) главы VII:

$$\frac{P-P_2}{P_0-P_2}=\varphi\left(\frac{x}{L},\ q_2\right), \tag{1.1}$$

причём ε было дано формулой (5.6) главы VII при $n=1$:

$$\varepsilon=\frac{kp_0\pi^2}{4m\mu L^2}, \tag{1.2}$$

а величина q_2 дана формулой (6.11) главы VII:

$$q_2 = e^{-4\varepsilon_2 \tau}.$$

Величина $\tau(t)$ вычислялась по формулам (6.8) и (6.2) главы VII, в которых было принято $n = 1$:

$$\tau(t) = \frac{p_2}{p_0} t + \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}\right). \qquad (1.3)$$

Наконец, весовой расход вычислялся по формуле (8.7) главы VII при $n = 1$:

$$G_1 = \frac{kgF(P_0 - P_2)}{2\beta\mu L}\,\vartheta_2(q_2), \qquad (1.4)$$

где F есть площадь поперечного сечения трубы.

В измерениях приходилось иметь дело с объёмным расходом, отнесённым к нормальному давлению (760 *мм* ртутного столба) и температуре 15° Ц. Этот расход Q получается по формуле

$$Q = \frac{G_1}{\gamma_a}, \qquad (1.5)$$

где γ_a — вес единицы объёма воздуха при атмосферном давлении, причём

$$\gamma_a = \frac{p_a}{\beta}. \qquad (1.6)$$

Отсюда имеем

$$Q = \frac{kg(P_0 - P_2)F}{2Lp_a\mu}\,\vartheta_2(q_2). \qquad (1.7)$$

Так как режим истечения принимался за изотермический ($n = 1$), то следовало принять

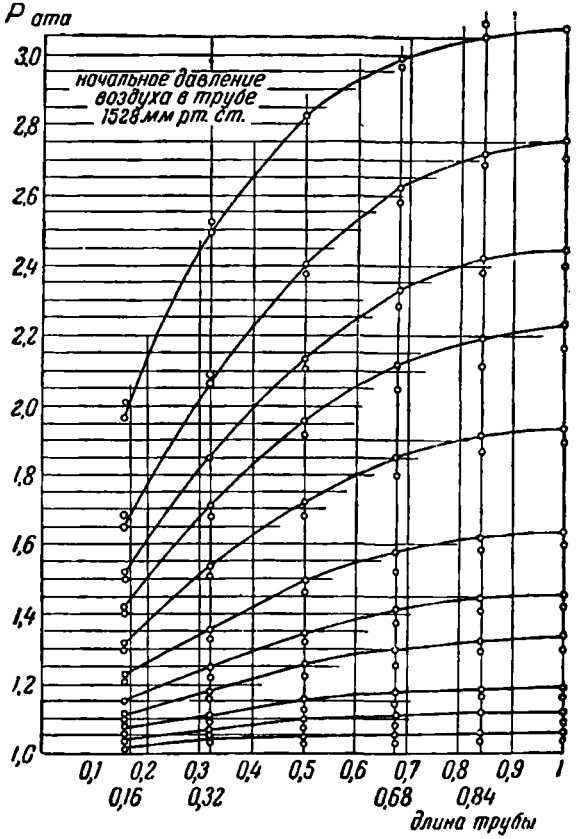
$$P_0 = p_0^2, \quad P = p^2. \qquad (1.8)$$

Из опытов над установившимся движением была заранее известна проницаемость k для того песка, состав которого дан в главе VI.

Для пласта тех размеров, которые указаны в главе VI, было найдено

$$\varepsilon = 0{,}058\,\frac{p_0}{p_a}. \qquad (1.9)$$

Здесь p_a есть нормальное давление атмосферы, p_0 — начальное абсолютное давление газа в пласте, выраженное в атмо-



Фиг. 50.

сферах. Расход вычислялся по формуле

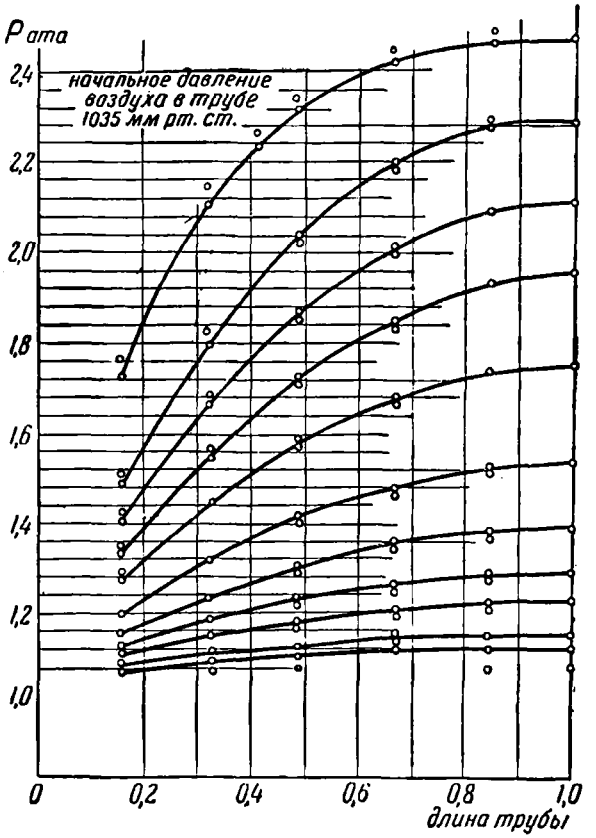
$$Q = 1{,}11\left(\frac{p_0^2 - p_2^2}{p_a^2}\right)\vartheta_2(q_2), \qquad (1.10)$$

полученной из формулы (1.7) после подстановки в неё зна-

чений (1.8) и замены величины

$$D = \frac{gkFp_a}{2L\mu} \tag{1.11}$$

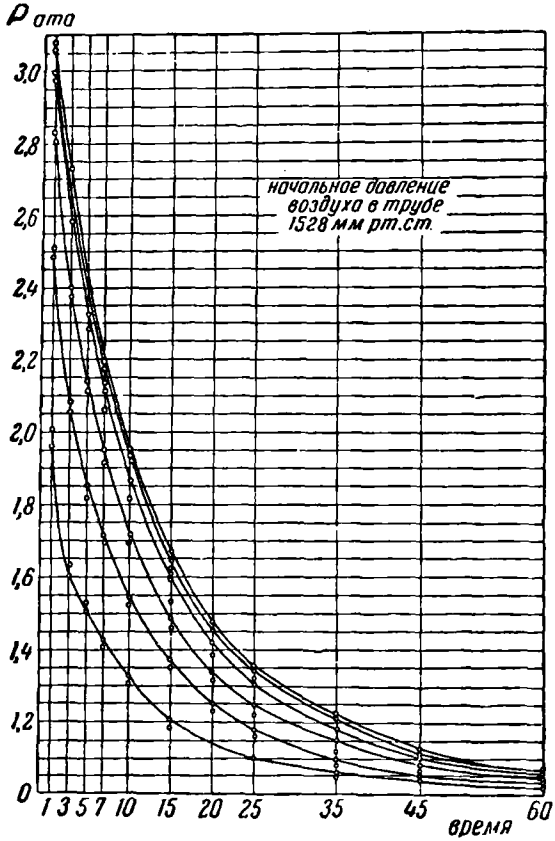
её численным значением, соответствующим тем размерам пласта и составу песка, которые были при опытах. За единицу



Фиг. 51.

времени была взята минута. В таблицах 16 и 17 приведена обработка наблюдений над истечением воздуха из трубы прямо в атмосферу, причём расход воздуха не замерялся. На фиг. 50 и 51 даны теоретические графики распределения давлений

по длине трубы, а на фиг. 52 и 53 — графики изменения давления в зависимости от изменения времени в шести местах трубы, где стояли манометры. Кружочками отмечены точки,



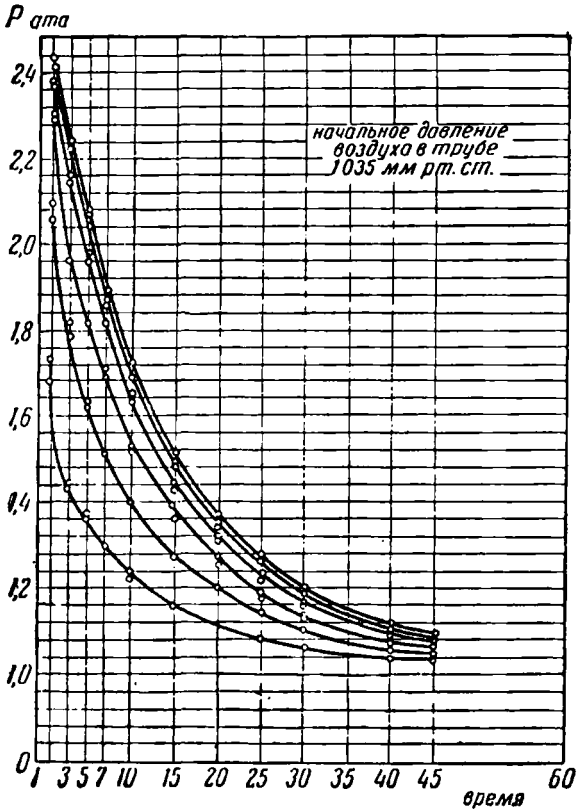
Фиг. 52.

соответствующие результатам наблюдений. Как общее правило, эти точки лежат ниже теоретических кривых, но отклонения в большинстве случаев незначительны.

Фиг. 50—53 представляют систему интегральных кривых, иллюстрирующих полученное нами решение, и они показывают, что главную роль в рассматриваемой задаче играет не

изменение давления по длине трубы (имеющее, кстати сказать, одинаковое течение), а *изменение давления во времени*, тоже носящее однообразный характер по всей трубе.

В таблицах 18, 19 и 20 приведена обработка наблюдений в трёх разных случаях, когда одновременно замерялись и



Фиг. 53.

давление и расход воздуха. Ввиду однообразного хода изменения давления в разных точках по длине трубы, мы приводим только диаграмму изменения давления посредине трубы. На фиг. 54, 55 и 56 даны графики, изображающие ход изменения объёмного расхода воздуха в зависимости от времени.

Таблица 16. **Распределение давления во времени и по длине ртутного столба, при истечении воздуха**

Расстояние манометра от открытого конца трубы в долях длины трубы	Время t в минутах	1	3	5	7
$x = 0{,}16$	$P_{теор}$	1,963	1,649	1,509	1,418
	$P_{эксп}$	2,005	1,667	1,516	1,411
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 2,14	− 1,09	− 0,46	+ 0,49
$x = 0{,}32$	$P_{теор}$	2,494	2,068	1,855	1,710
	$P_{эксп}$	2,510	2,080	1,854	1,694
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,64	− 0,58	+ 0,05	+ 0,94
$x = 0{,}50$	$P_{теор}$	2,831	2,402	2,136	1,952
	$P_{эксп}$	2,829	2,385	2,110	1,913
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	+ 0,07	+ 0,71	+ 1,22	+ 2,00
$x = 0{,}68$	$P_{теор}$	2,997	2,621	2,325	2,114
	$P_{эксп}$	2,984	2,590	2,293	2,060
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	+ 0,43	+ 1,18	+ 1,38	+ 2,55
$x = 0{,}84$	$P_{теор}$	3,059	2,727	2,420	2,197
	$P_{эксп}$	3,083	2,714	2,396	2,140
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,78	+ 0,48	+ 0,99	+ 2,59
$x = 1$	$P_{теор}$	3,087	2,763	2,452	2,225
	$P_{эксп}$	3,083	2,722	2,424	2,178
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	+ 0,13	+ 1,00	+ 1,14	+ 1,00

трубы, в зависимости от начального давления в трубе p_0=1,528 *мм* через открытый конец в атмосферу.

10	15	20	25	35	45	60
1,309	1,204	1,144	1,106	1,064	1,043	1,029
1,305	1,182	1,136	1,098	1,061	1,043	1,032
+ 0,31	+ 1,83	+ 0,69	— 0,72	+ 0,28	0	— 0,29
1,531	1,355	1,249	1,182	1,105	1,066	1,038
1,521	1,343	1,233	1,170	1,095	1,059	1,044
+ 0,65	+ 0,89	+ 1,28	+ 1,02	+ 0,90	+ 0,66	— 0,58
1,721	1,492	1,344	1,253	1,149	1,038	1,048
1,695	1,457	1,316	1,226	1,122	1,071	1,038
+ 1,51	+ 2,35	+ 2,08	+ 2,15	+ 2,35	+ 1,56	+ 0,95
1,851	1,584	1,410	1,300	1,180	1,104	1,054
1,814	1,537	1,376	1,267	1,144	1,083	1,045
+ 2,00	+ 2,97	+ 2,41	+ 2,54	+ 3,05	+ 1,90	+ 0,85
1,914	1,625	1,445	1,326	1,186	1,111	1,057
1,886	1,596	1,418	1,302	1,178	1,109	1,050
+ 1,46	+ 1,78	+ 1,87	+ 1,81	+ 0,67	+ 0,18	+ 0,66
1,937	1,641	1,457	1,335	1,190	1,114	1,058
1,907	1,615	1,434	1,306	1,182	1,098	1,053
+ 1,55	+ 1,58	+ 1,58	+ 1,00	+ 0,67	+ 1,44	+ 0,47

Таблица 17. **Распределение давления во времени и по длине ртутного столба, при истечении воздуха**

Расстояние манометра от открытого конца трубы в долях длины трубы	Время t в минутах	1	3	5	7
$x = 0{,}16$	$P_{теор}$	1,679	1,452	1,361	1,298
	$P_{эксп}$	1,723	1,469	1,370	1,301
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 2,62	− 1,17	− 0,66	− 0,23
$x = 0{,}32$	$P_{теор}$	2,060	1,758	1,616	1,513
	$P_{эксп}$	2,092	1,780	1,624	1,517
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 1,55	− 1,14	− 0,50	− 0,26
$x = 0{,}50$	$P_{теор}$	2,289	2,002	1,828	1,695
	$P_{эксп}$	2,297	2,005	1,825	1,687
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,35	− 0,16	+ 0,16	+ 0,44
$x = 0{,}68$	$P_{теор}$	2,385	2,161	1,972	1,820
	$P_{эксп}$	2,392	2,155	1,959	1,816
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,30	+ 0,28	+ 0,87	+ 0,22
$x = 0{,}84$	$P_{теор}$	2,415	2,239	2,045	1,884
	$P_{эксп}$	2,427	2,242	2,042	1,888
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,50	− 0,13	+ 0,15	− 0,21
$x = 1$	$P_{теор}$	2,421	2,244	2,070	1,906
	$P_{эксп}$	2,427	2,268	2,065	1,906
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}\%$	− 0,25	− 1,07	+ 0,24	0

трубы, в зависимости от начального давления в трубе $p_0 = 1{,}035$ *мм* через открытый конец в атмосферу.

10	15	20	25	30	40	45
1,229 1,235	1,155 1,158	1,111 1,113	1,082 1,086	1,064 1,067	1,043 1,045	1,036 1,034
− 0,49	− 0,26	− 0,18	− 0,37	− 0,28	− 0,19	+ 0,19
1,397 1,398	1,269 1,269	1,190 1,189	1,139 1,137	1,104 1,102	1,064 1,063	1,052 1,038
− 0,072	0	+ 0,084	+ 0,17	+ 0,18	+ 0,094	+ 1,3
1,543 1,533	1,370 1,361	1,262 1,254	1,191 1,181	1,142 1,135	1,084 1,078	1,067 1,042
+ 0,65	+ 0,66	+ 0,63	+ 0,60	+ 0,61	+ 0,55	+ 2,44
1,643 1,634	1,442 1,430	1,314 1,303	1,228 1,218	1,169 1,161	1,099 1,090	1,078 1,046
+ 0,55	+ 0,83	+ 0,84	+ 0,81	+ 0,70	+ 0,82	+ 2,97
1,695 1,693	1,480 1,476	1,341 1,336	1,248 1,242	1,184 1,177	1,107 1,103	1,084 1,054
+ 0,12	+ 0,27	+ 0,37	+ 0,48	+ 0,60	+ 0,36	+ 2,77
1,713 1,713	1,492 1,505	1,350 1,350	1,255 1,253	1,189 1,188	1,110 1,094	1,086 1,057
0	− 0,87	0	+ 0,16	+ 0,08	+ 0,54	+ 2,67

Таблица 18. Суммарный расход газа, вычисленный по объёму (в $см^3$), при истечении из колонны через открытый конец трубы, находившийся под небольшим переменным противодавлением, для случая начального давления в колонне $p_0 = 200$ мм ртутного столба.

Время t в мин.	$\Sigma(t)$	Суммарный объёмный расход воздуха в $см^3$, полученный		Время t в мин.	$\Sigma(t)$	Суммарный объёмный расход воздуха в $см^3$, полученный	
		из опыта	теоретически			из опыта	теоретически
1	0,98988	3 325	3 021	14	12,86138	11 735	10 893
2	1,96178	4 665	4 267	15	13,73735	12 045	11 206
3	2,91877	5 705	5 221	16	14,61109	12 335	11 499
4	3,86171	6 585	6 027	17	15,48292	12 605	11 773
5	4,79316	7 345	6 734	18	16,35309	12 845	12 026
6	5,71508	8 035	7 373	19	17,22189	13 070	12 264
7	6,62804	8 655	7 937	20	18,08941	13 275	12 485
8	7,53364	9 215	8 458	21	18,95570	13 462	12 691
9	8,37983	9 730	8 941	22	19,82131	13 637	12 883
10	9,32675	10 205	9 389	23	20,68612	13 795	13 063
11	10,21606	10 640	9 806	24	21,55026	13 940	13 231
12	11,10112	11 040	10 194	25	22,41379	14 075	13 388
13	11,92266	10 405	10 556	26	23,27702	14 195	13 534

Таблица 19. **Минутные расходы газа при истечении из колонны через открытый конец трубы, находившийся под небольшим переменным противодавлением, вычисленные по объёму (в *см*³).**

Время t в мин.	$\Sigma(t)$	Суммарный объёмный расход воздуха в *см*³, полученный		Время t в мин.	$\Sigma(t)$	Суммарный объёмный расход воздуха в *см*³, полученный	
		из опыта	теоретически			из опыта	теоретически
		1) Начальное давление $P_0 = 625$ *мм* ртутного столба					
1	0,98902	7 635	6 366	15	13,07730	1 010	1 165
3	2,92666	4 070	3 815	17	14,45880	815	1 001
5	4,74735	2 980	2 932	19	16,10267	690	838
7	6,94650	2 320	2 284	21	17,56566	580	714
9	8,23812	1 860	1 972	23	19,00191	480	611
11	9,89930	1 500	1 645	27	21,79790	332	450
13	12,50800	1 230	1 381				
		2) Начальное давление $P_0 = 820$ *мм* ртутного столба					
1	0,98556	9 180	9 112	10	8,77869	2 410	2 478
2	1,72869	6 910	6 904	11	9,04914	2 200	2 250
3	2,87454	6 010	5 591	12	10,30474	2 030	2 045
4	3,78104	5 200	4 799	13	11,04579	1 870	1 864
5	4,66440	4 520	4 225	14	11,77391	1 730	1 702
6	5,52585	3 950	3 760	15	12,48951	1 600	1 554
7	6,36679	3 470	3 368	16	13,19328	1 490	1 423
8	7,18853	3 035	3 033	17	13,88516	1 400	1 304
9	7,99216	2 680	2 738				

Таблица 20. **Распределение давлений во времени в середине ходившийся под пере**

1) Начальное давление в трубе

Расстояние манометра от открытого конца трубы в долях длины трубы	Время t в мин.	1	3	5
$x = 0{,}50$	$P_{теор}$	2,083	1,866	1,733
	$P_{эксп}$	2,060	1,833	1,695
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}$ %	+1,1	+1,76	+2,19

2) Начальное давление в трубе

Расстояние манометра от открытого конца трубы в долях длины трубы	Время t в мин.	1	3	5	7	9
$x = 0{,}50$	$P_{теор}$	1,797	1,659	1,567	1,481	1,438
	$P_{эксп}$	1,825	1,662	1,555	1,476	1,404
	$\frac{P_{теор} - P_{эксп}}{P_{теор}}$ %	−1,78	−0,18	+0,76	+0,33	+2,36

трубы при истечении из неё воздуха через открытый конец, наименным противодавлением.

$P_0 = 820$ *мм* ртутного столба.

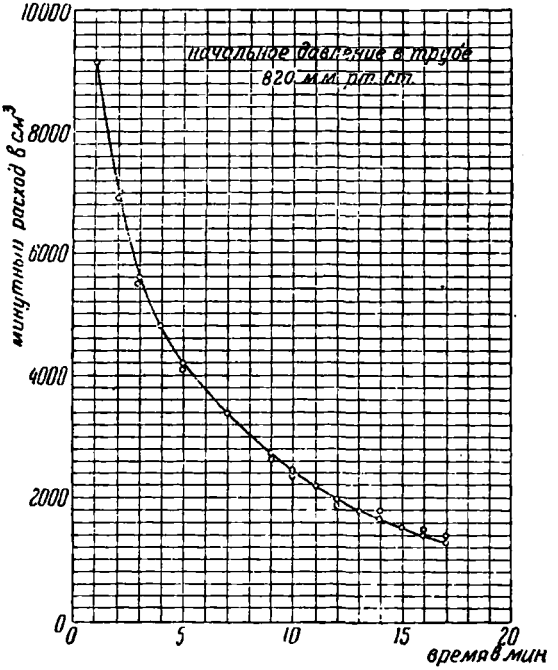
8	10	15	20	30
1,588	1,514	1,377	1,291	1,196
1,546	1,468	1,343	1,260	1,178
+2,64	+3,04	+2,47	+2,40	+1,51

$P_0 = 625$ *мм* ртутного столба.

11	13	15	17	20	25	30	40	60
1,390	1,349	1,315	1,288	1,250	1,208	1,185	1,146	1,122
1,355	1,317	1,284	1,256	1,223	1,182	1,154	1,135	1,118
+2,52	+2,37	+2,36	+2,48	+2,16	+2,15	+2,62	+0,95	+0,35

На основании этого сравнения теории с наблюдениями мы считаем, что *в пределах средних давлений развитая нами в гл ве VII теория одномерного движения газа в песке удовлетворительна.*

Заметим, попутно, что из опытов над установившимся движением воздуха был найден, введённый Слихтером, эффек-

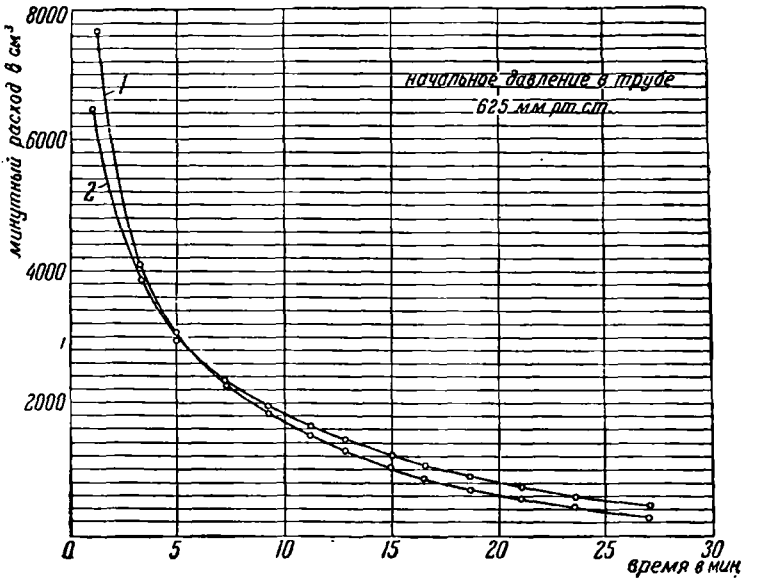


Фиг. 54.

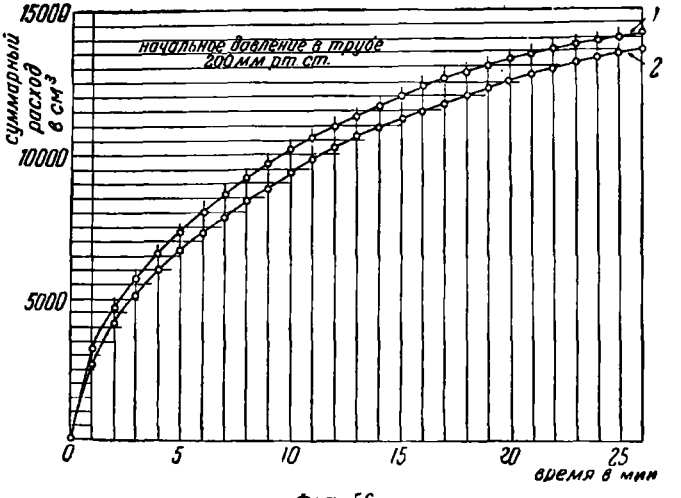
тивный диаметр d частицы песка, загруженного в опытную трубу: $d = 0{,}243$ *мм*

§ 2. Опыты ГИНИ в 1931 и 1932 гг.

Эти опыты были произведены сотрудником ГИНИ И. П. Москальковым на новой установке, устроенной аналогично той установке пласта, на которой производились опыты 1928 г. Её изображение в вертикальном разрезе дано на фиг. 57.

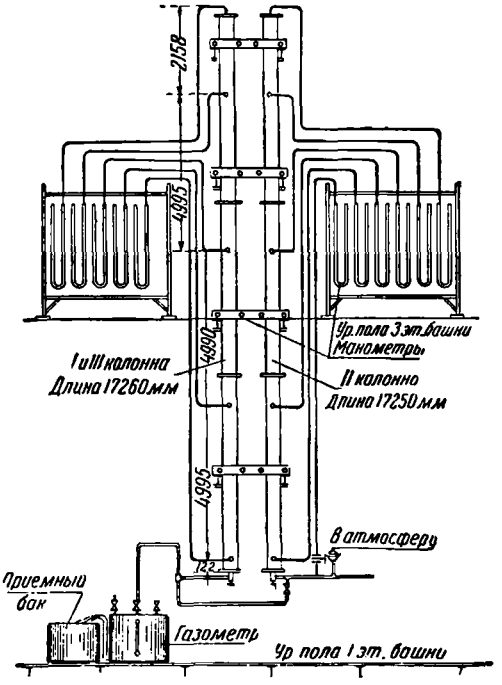

8000
6000
4000
2000
минутный расход в см³
1
2
начальное давление в трубе
625 мм рт. ст.
0
5
10
15
20
25
30
время в мин

Фиг. 55.


15000
10000
5000
суммарный расход в см³
начальное давление в трубе
200 мм рт. ст.
1
2
0
5
10
15
20
25
время в мин

Фиг. 56.

Пласт состоял из U-образной трубы, диаметром в 6 дюймов и общей длиной в 35 *м*. Давление замерялось либо ртутными, либо пружинными манометрами. Точки замера были расположены приблизительно через 5 *м*, причём начальная и конечная отстояли от концов колонны на расстоянии 120 *мм*. Сами

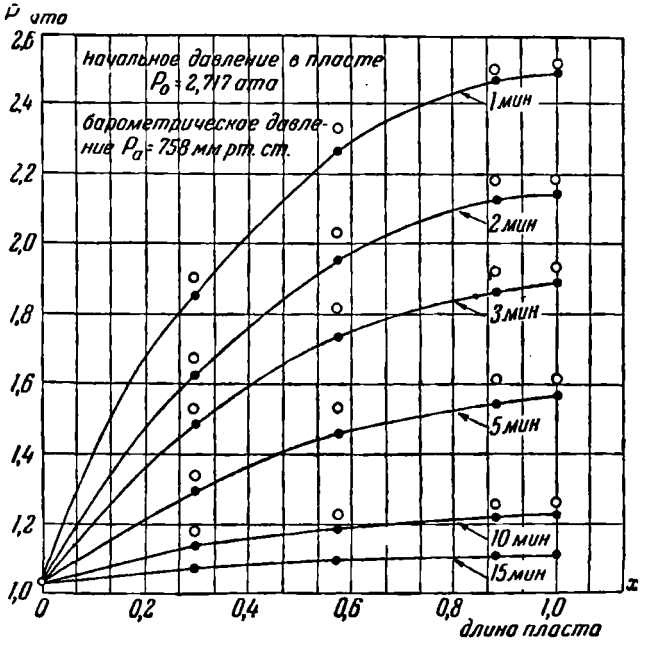


Фиг. 57.

манометры были расположены в одном месте — на третьем этаже башни, в которой была помещена вся установка. Замер газа, вытекавшего из колонны, производился газометром, ёмкость которого была 0,6 $м^3$. На пути от колонны к газометру была установлена трубка Пито, при помощи которой также можно было измерять расход воздуха.

Опыты производились сначала на всей длине колонны (35 *м*), но затем установка была разделена на две отдельные колонны путём выброса угольников и закрытия получившихся

двух колонн заглушками, несущими на себе по одному отверстию для манометров. Такая перестройка облегчила техническое выполнение опытов. Труба была наполнена просушенным песком. Для предупреждения от проскакивания газа в промежутках между песчинками и стенками трубы последние



Фиг. 58.

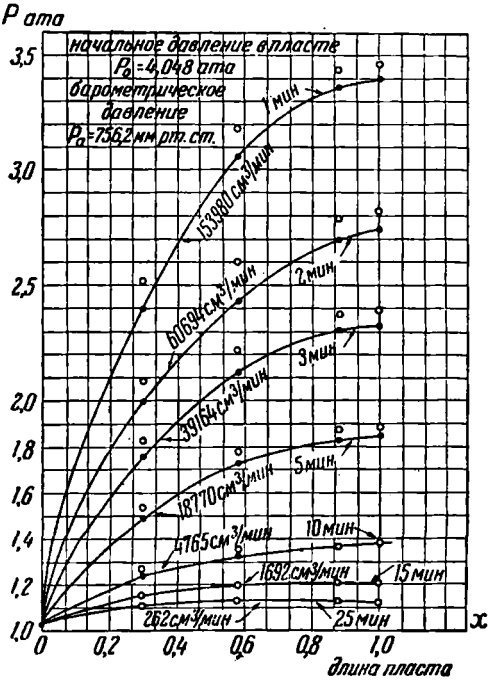
были смазаны слегка проваренным маслом. Уплотнение засыпанного песка достигалось путём продолжительного постукивания по стенкам колонны по всей её длине и продолжалось до прекращения оседания столба песка.

Эксперименты велись при давлениях от 1,35 до 6 *ат*. Были произведены три серии опытов.

1) Первая серия опытов велась на пласте I ёмкостью в 328 968 *см*^{3}, причём он был составлен из мелкого песка с фракционным составом и пористостью, указанными в главе VI. Из предварительных опытов над установившимся движением был определён коэффициент фильтрации K, а следо-

вательно, и проницаемость. Обработка наблюдений была произведена по формулам § 1.

На фиг. 58 сделано сравнение одного из наблюдений при начальном абсолютном давлении $p_0 = 2{,}717$ *ат* и при истечении в атмосферу с теорией, развитой в гл. VII. На оси абсцисс отмечено расположение точек пласта, в которых



Фиг. 59.

замерялось давление, а параллельно оси ординат отложены значения (чёрные кружочки — соответствуют результатам теоретических подсчётов) абсолютных давлений воздуха в этих точках. Теоретические кривые вычерчены на основании формул § 1. Каждая из них соответствует той минуте процесса истечения, которая отмечена около кривой.

Светлые кружочки изображают результаты наблюдений.

На фиг. 59 такое же построение сделано для начального абсолютного давления $p_0 = 4{,}048$ *ат* и истечения в газометр.

Около кривых отмечен расход газа в кубических сантиметрах в минуту.

Между теорией, данной в главе VII, и наблюдениями имеют место отклонения, но они не являются значительными. И. П. Москальков в своей работе [1]) объясняет их несовершенством опытов.

2) Вторая серия опытов велась на пласте II с полной ёмкостью 328 968 $см^3$, составленном из смеси с глиной того самого песка, который был применён в первой серии опытов. Как песок, так и глина были предварительно просушены, причём глина подвергалась мелкому размолу с последующим просевом через мелкие сита. Весовое отношение глины и песка в смеси составляло 100:215. Уплотнение достигалось постукиванием. Вес единицы объёма смеси был равен

$$\gamma = 2{,}507\ г/см^3,$$

в то время как вес единицы объёма чистого песка составлял 2,639 $г/см^3$. Пористость смеси оказалась равной $m = 0{,}3775$ вместо $m = 0{,}3765$ для песка в первой серии опытов.

Механический анализ смеси по фракциям зернистости, произведённый с помощью сит, дал следующие результаты:

$d = 0{,}059 \div 0{,}073$ *мм*	9,73%
$d = 0{,}073 \div 0{,}077$ *мм*	1,91%
$d = 0{,}077 \div 0{,}109$ *мм*	2,17%
$d = 0{,}109 \div 0{,}123$ *мм*	1,78%
$d = 0{,}123 \div 0{,}152$ *мм*	3,72%
$d = 0{,}152 \div 0{,}156$ *мм*	0,11%
$d = 0{,}156 \div 0{,}169$ *мм*	0,74%
$d = 0{,}169 \div 0{,}204$ *мм*	21,45%
$d = 0{,}204 \div 0{,}388$ *мм*	1,58%
$d = 0{,}388 \div 0{,}400$ *мм*	56,54%
$d = 0{,}400$ и более *мм*	0,27%

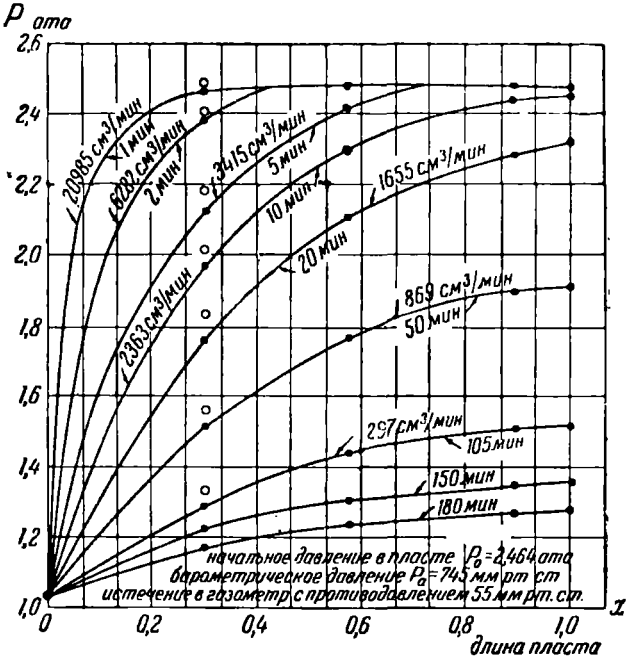
Определение коэффициента фильтрации сделано было по опытам над установившимся течением воздуха.

Всего было сделано двадцать опытов, причём начальное давление (избыточное) колебалось от 300 до 3800 *мм* ртут-

[1]) «Нефтяное хозяйство», 1932, № 3.

ного столба. При наблюдениях был отмечен важный факт: при тех же начальных давлениях и той же пористости скорость истечения была гораздо меньше, чем в первом пласте (примерно в восемнадцать раз). Время полного истощения пласта доходило до 15 часов.

Сравнение результатов опыта с теорией производилось так же, как и в предыдущем случае. Оно представлено на

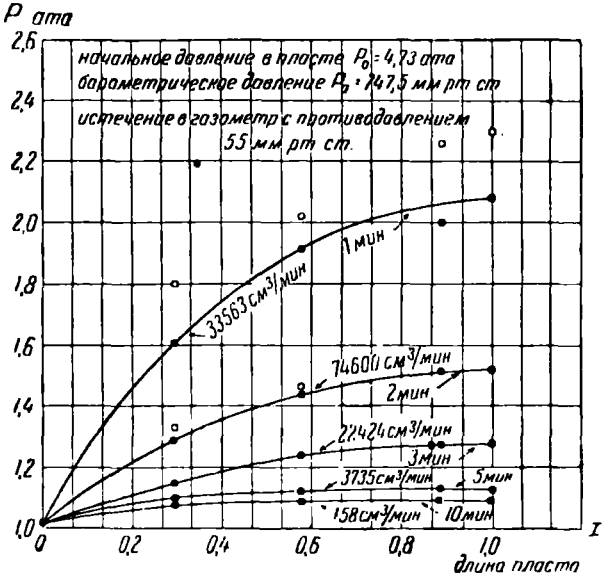


Фиг. 60.

фиг. 60, причём на каждой кривой распределения давления, соответствующей определённой минуте истечения, дана величина секундного расхода в *см³/мин*.

Из диаграммы видно, что экспериментальные точки укладываются довольно хорошо вблизи теоретических кривых, особенно в начальной стадии опыта. Аналогичный характер имеют и диаграммы остальных опытов этой серии.

3) Третья серия опытов велась на пласте III, который был составлен из речного жёлтого крупнозернистого песка. Вес единицы объёма сухого песка был равен $\gamma = 2{,}646$ *г/см*^{3}, а пористость была равна $m = 0{,}3725$.



Фиг. 61.

Фракционный состав песка, по данным механического анализа, был следующий:

$d = 0{,}059 \div 0{,}073$ *мм*	0,35%
$d = 0{,}073 \div 0{,}077$ *мм*	0,13%
$d = 0{,}077 \div 0{,}109$ *мм*	0,12%
$d = 0{,}109 \div 0{,}123$ *мм*	0,17%
$d = 0{,}123 \div 0{,}152$ *мм*	0,41%
$d = 0{,}152 \div 0{,}156$ *мм*	0,11%
$d = 0{,}156 \div 0{,}169$ *мм*	0,74%
$d = 0{,}169 \div 0{,}204$ *мм*	0,86%
$d = 0{,}204 \div 0{,}388$ *мм*	0,20%
$d = 0{,}388 \div 0{,}400$ *мм*	23,83%
$d = 0{,}400$ и более *мм*	73,76%

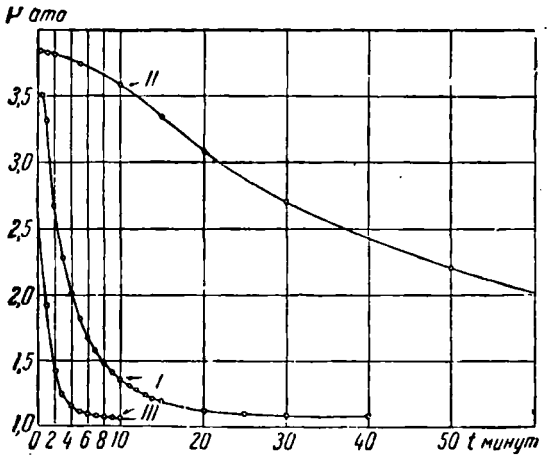
Как видно из этих данных, главной составной фракцией являются песчинки, имеющие диаметр более 0,4 *мм*.

Проницаемость k была определена из опытов над установившимся движением.

Опыты над неустановившимся движением производились при избыточных давлениях от 300 до 3800 *мм* ртутного столба.

На фиг. 61 дано сравнение теории с наблюдениями, причём построение велось аналогично предыдущим. Здесь, как и во всех остальных опытах этой серии, наблюдается расхождение между теоретическими и наблюдёнными значениями давлений в начале процесса истечения, но эти расхождения быстро уменьшаются в дальнейшем процессе истечения.

Продолжительность истечения была небольшая — около 10 мин., т. е. примерно в четыре раза меньше, чем в соответствующем опыте первой серии.



Фиг. 62.

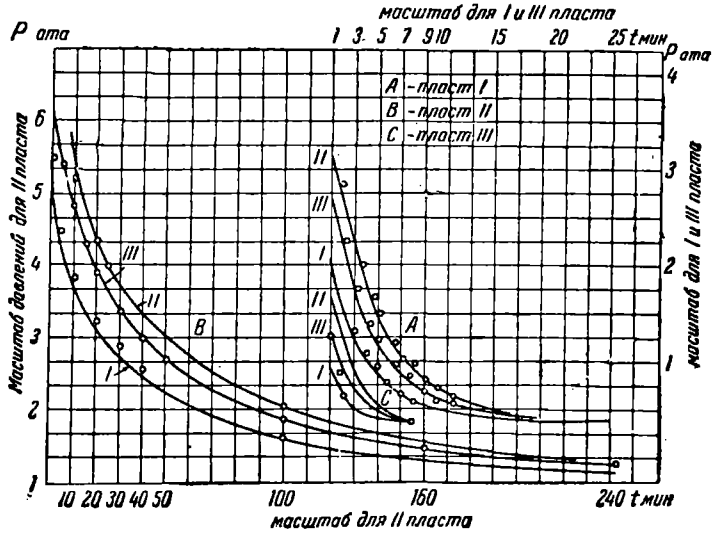
Учитывая обстоятельства опытов, И. П. Москальков считает согласие теории главы VII с наблюдениями удовлетворительными.

На фиг. 62 дана для всех трёх серий опытов сводная диаграмма изменения давления в зависимости от времени для

одной и той же точки пласта (x_4), при очень близких начальных давлениях (в *ата*), а именно:

для I пласта при $p_0 = 3{,}93$ *ата*,
для II пласта при $p_0 = 3{,}82$ *ата*,
для III пласта при $p_0 = 4{,}00$ *ата*.

На фиг. 63 дана для всех трёх серий сводная диаграмма изменения давления в зависимости от времени для трёх раз-



Фиг. 63.

личных точек каждого пласта, геометрически одинаково расположенных, при различных начальных давлениях, а именно:

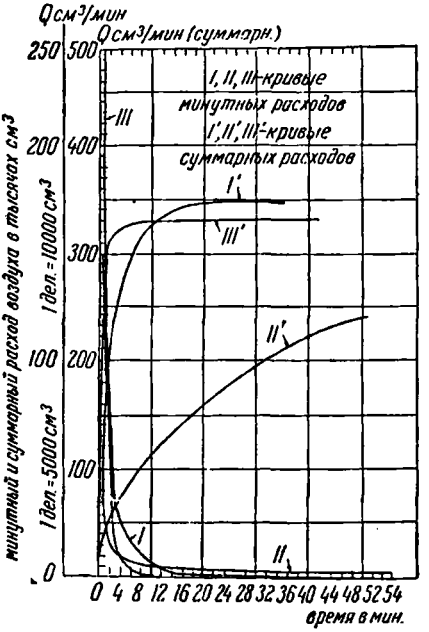
в I пласте при $p_0 = 2919$ *мм* рт. ст.,
во II пласте при $p_0 = 3592$ *мм* рт. ст.,
в III пласте при $p_0 = 3420$ *мм* рт. ст.

На фиг. 64 дана для всех серий опытов сводная диаграмма расходов воздуха как минутных (кривые истощения пласта), так и суммарных (кривая суммарной добычи) при

почти одинаковых начальных давлениях, равных соответственно:

в I пласте при $p_0 = 2137$ *мм* рт. ст.,
во II пласте при $p_0 = 2057$ *мм* рт. ст.,
в III пласте при $p_0 = 1992$ *мм* рт. ст.

На основании проделанных опытов И. П. Москальков установил следующий закон: *время истощения T каждого*



Фиг. 64.

пласта связано с эффективным диаметром частиц песка d соотношением

$$d\sqrt{T} = \text{const.}^*).$$

*) В докторской диссертационной работе Б. Б. Лапука (Газодинамические основы разработки месторождений природных газов, 1946 г.) дано теоретическое истолкование опытного закона И. П. Москалькова.

В самом деле, произведённые для трёх пластов измерения дали следующие числа:

$$d_1\sqrt{T_1} = 1{,}65; \quad d_2\sqrt{T_2} = 1{,}63; \quad d_3\sqrt{T_3} = 1{,}654.$$

§ 3. Опыты в МГУ над неустановившимся движением газа.

Эти опыты были проведены под общим руководством Д. С. Вилькера в Гидродинамической лаборатории имени Н. Е. Жуковского Московского государственного университета на том же пласте, на котором производились опыты с установившимся движением, описанные в главе VI. Песок был тот же, что и в опытах ГИНИ (см. §§ 1 и 2, первая серия опытов).

Измерение давлений производилось ртутными манометрами, установленными в пяти точках колонны. Объём вытекавшего воздуха измерялся газометром.

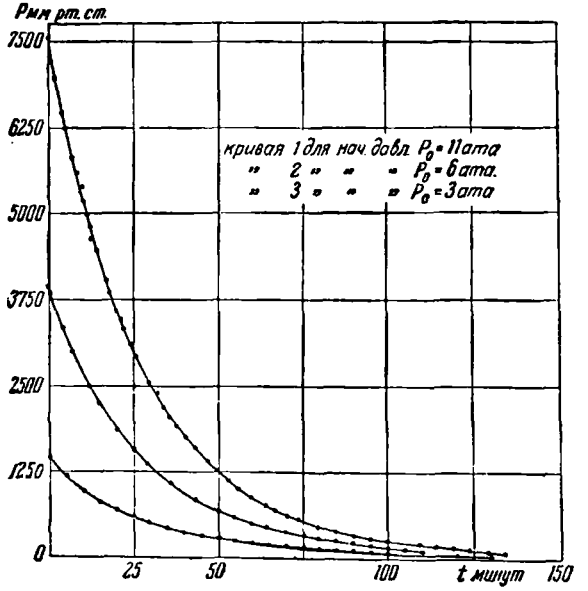
Опыты производились следующим образом. При закрытом газометре компрессор накачивал в пласт воздух до нужного наперёд заданного давления, после чего закрывался вентиль на газопроводящей линии. Давление весьма быстро выравнивалось по всей длине пласта, и на манометрах фиксировалось начальное давление в пласте. Время открытия крана у газометра соответствовало началу фонтанирования скважины. Во всё время фонтанирования измерялись изменение давления в разных точках пласта и расход воздуха.

На указанной установке было проведено десять опытов с начальным давлением в пласте от 1 до 10 *атм*.

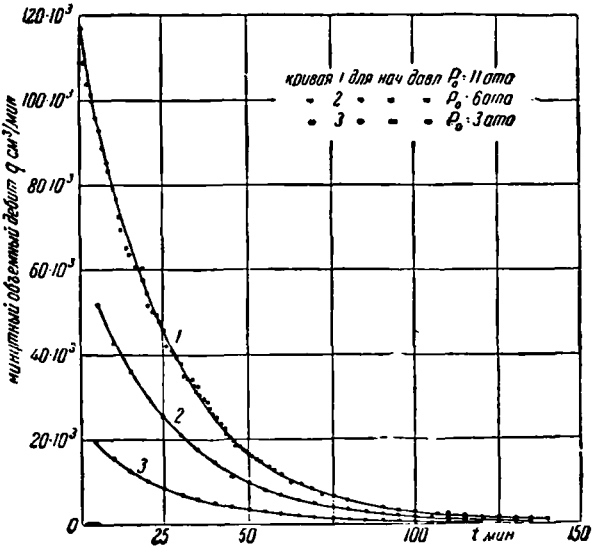
На основании опытных данных был построен ряд диаграмм, иллюстрирующих результаты опытов. Из ряда полученных диаграмм выбраны три, отвечающие начальным давлениям соответственно в 11; 6 и 3 *атм*.

На фиг. 65 изображены графики изменения давления p в зависимости от времени, построенные по опытным точкам для манометра, помещённого вблизи выхода из пласта. Все кривые имеют одинаковый характер независимо от начального давления p_0.

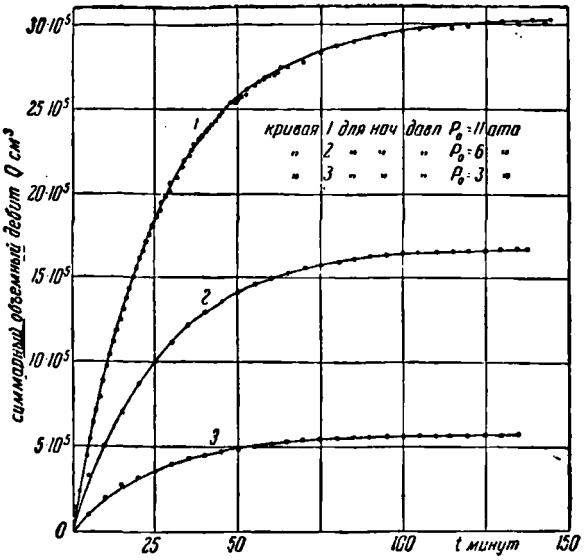
На фиг. 66 даны графики изменения объёмного минутного дебита пласта q в зависимости от времени t. Все кривые имеют одинаковый характер независимо от начального давления p_0. Объём q отнесён к нормальному давлению.


Рмм рт.ст.
7500
6250
5000
3750
2500
1250
0
25
50
100
t минут
150
кривая 1 для нач. давл. P_0 = 11 ата
" 2 " " " P_0 = 6 ата.
" 3 " " " P_0 = 3 ата

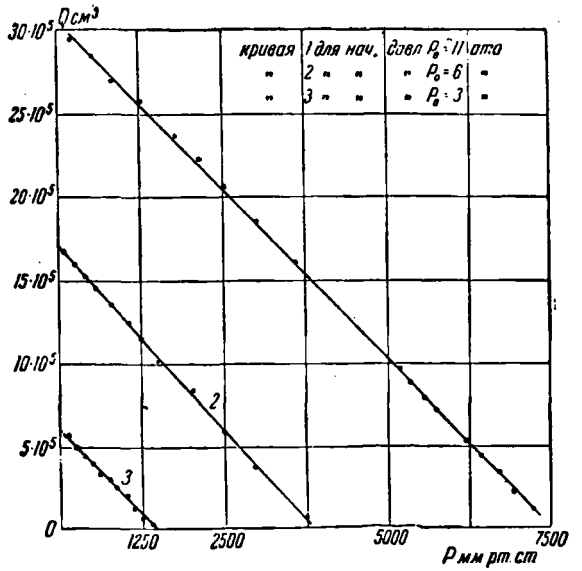
Фиг. 65.


120·10³
100·10³
80·10³
60·10³
40·10³
20·10³
0
25
50
100
t мин
150
минутный объемный дебит q см³/мин
кривая 1 для нач давл P_0 = 11 ата
" 2 " " " P_0 = 6 ата
" 3 " " " P_0 = 3 ата
1
2
3

Фиг. 66.


30·10⁵
25·10⁵
20·10⁵
15·10⁵
10·10⁵
5·10⁵
0
суммарный суточный дебит Q см³
кривая 1 для нач давл P_0 = 11 ата
" 2 " " " P_0 = 6 "
" 3 " " " P_0 = 3 "
1
2
3
25
50
100
t минут
150

Фиг. 67.


Q см³
30·10⁵
25·10⁵
20·10⁵
15·10⁵
10·10⁵
5·10⁵
0
кривая 1 для нач. давл P_0 = 11 ата
" 2 " " " P_0 = 6 "
" 3 " " " P_0 = 3 "
2
3
1250
2500
5000
7500
P мм рт. ст

Фиг. 68.

На фиг. 67 даны графики суммарного объёмного дебита Q в зависимости от времени t. Все кривые имеют одинаковый характер независимо от начального давления p_0. Объём Q отнесён к нормальному давлению.

На фиг. 68 изображена зависимость суммарной объёмной добычи (дебита) пласта Q в зависимости от остаточного давления p, измерявшегося манометром, находившимся вблизи выхода из пласта. Полученные точки хорошо группируются около прямых линий независимо от величины начального давления.

§ 4. Опыты ГИНИ 1930 и 1931 гг.

Эти опыты производились на специально смонтированной установке, которая представляла собой герметически закрывающийся цилиндрический резервуар диаметром в 0,9 *м* и высотой в 2,5 *м* (фиг. 69). Резервуар засыпался люберецким кварцевым песком и, таким образом, представлял искусственный пласт. По оси пласта была заложена вертикальная скважина (в виде латунной трубки диаметром $d = 4$ *мм* или $d = 10$ *мм*), которая могла по мере надобности перемещаться вверх и вниз вдоль оси.

В шести плоскостях, перпендикулярных к оси резервуара, на равных расстояниях друг от друга были заложены очень тонкие трубки, представлявшие собой манометрические щупы. Их расположение изображено на фиг. 69. Назначением указанных манометрических щупов было определение радиуса действия скважины в горизонтальном направлении. Для определения изменения давления по высоте пласта были установлены ртутные манометры в шести точках (соответственно шести горизонтальным плоскостям).

Измерение расхода воздуха производилось, как и в описанных выше опытах, помощью газометра.

Результаты опытов представлены графически на фиг. 70—73, которые относятся к определённому местоположению забоя скважины (нижнего конца трубки) на уровне IV горизонта. Все остальные диаграммы, полученные в результате опытов, имели такой же характер.

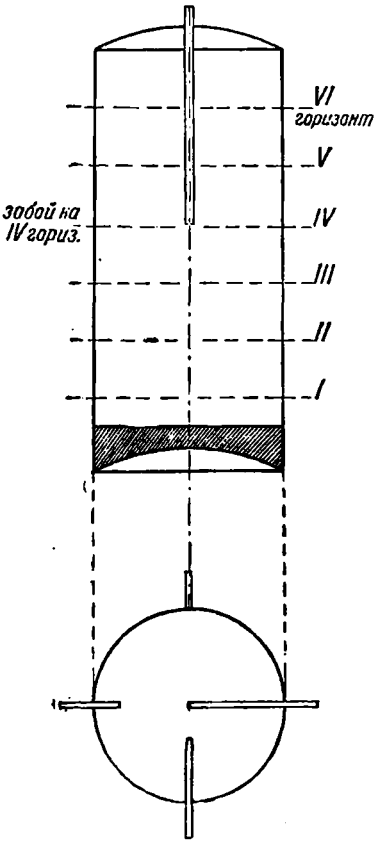
На фиг. 70 изображены графики изменения давления в зависимости от времени t. Кривые I, II, III, IV относятся к скважине диаметром в 4 *мм*, но отвечают четырём различным

начальным давлениям. Кривая V относится к скважине с диаметром в 10 *мм*. Начальное давление такое же, как и у кривой I. Мы видим, как вследствие значительно бо́льшего диаметра (в два с половиной раза) происходит несравненно более быстрое падение давления.

На фиг. 71 даны графики изменения суммарного объёмного дебита пласта Q в зависимости от времени t. Дебит отнесён к нормальному давлению. Кривая V относится к скважине диаметром в 10 *мм*. Кривые I, II, III и IV относятся к скважине диаметром в 4 *мм*. Начальные давления разные и должны быть взяты из фиг. 70.

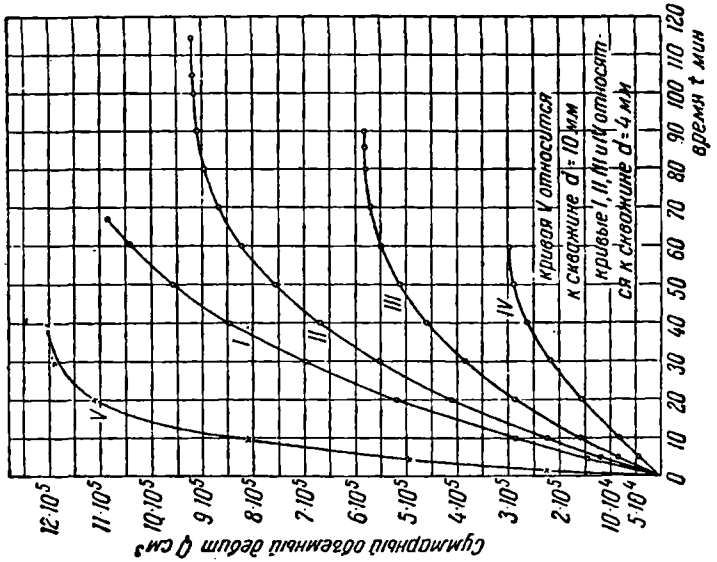
На фиг. 72 дана зависимость суммарного дебита скважины в зависимости от остаточного давления в пласте, наблюдавшегося вдали от забоя скважины. Мы видим, что точки, полученные из наблюдений, довольно хорошо группируются около прямых линий независимо от начального давления в пласте.

На фиг. 73 показано изменение давления по радиусу в IV горизонтальном сечении. Началу координат соответствует забой скважины. Распределение давлений дано через каждые 10 минут, начиная с 5-й минуты до конца истечения.

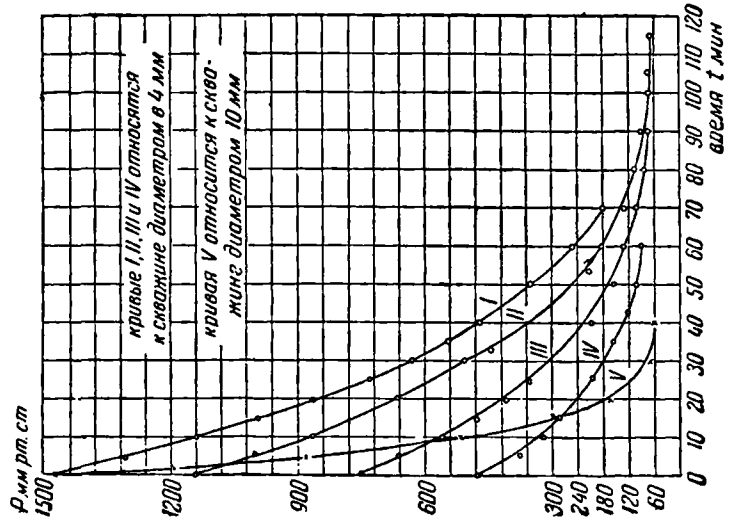


Фиг. 69.

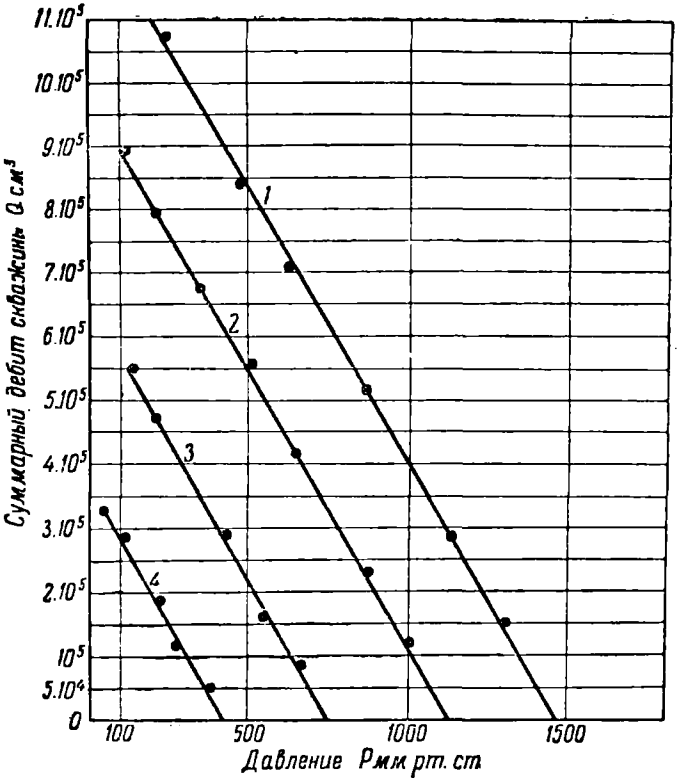
Все эти опыты были произведены и обработаны графически Д. С. Вилькером. Они представляют тот интерес, что в них в отличие от опытов, изложенных в §§ 1, 2, 3, относящихся


Суммарный объемный дебит Q см³
12·10⁵
11·10⁵
10·10⁵
9·10⁵
8·10⁵
7·10⁵
6·10⁵
5·10⁵
4·10⁵
3·10⁵
2·10⁵
10·10⁴
5·10⁴
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120
время t мин
I
II
III
IV
V
кривая V относится к скважине d=10 мм
кривые I, II, III и IV относятся к скважине d=4 мм

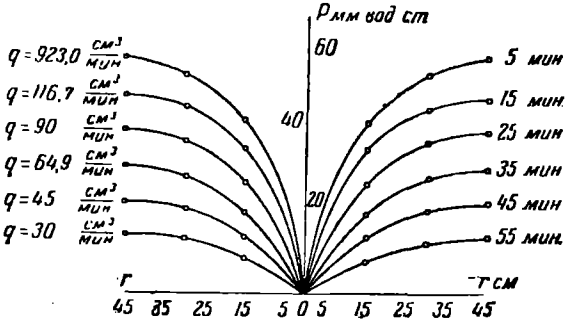
Фиг. 71.


P мм рт. ст
1500
1200
900
600
300
240
180
120
60
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120
время t мин
I
II
III
IV
V
кривые I, II, III и IV относятся к скважине диаметром в 4 мм
кривая V относится к скважине диаметром 10 мм

Фиг. 70.


11.10⁵
10.10⁵
9.10⁵
8.10⁵
7.10⁵
6.10⁵
5.10⁵
4.10⁵
3.10⁵
2.10⁵
10⁵
5.10⁴
0
100
500
1000
1500
1
2
3
4
Суммарный дебит скважины Q см³
Давление Р мм рт. ст.

Фиг. 72.


Р мм вод ст
60
40
20
q = 923,0 см³/мин
q = 116,7 см³/мин
q = 90 см³/мин
q = 64,9 см³/мин
q = 45 см³/мин
q = 30 см³/мин
5 мин
15 мин
25 мин
35 мин
45 мин
55 мин
r
r см
45 35 25 15 5 0 5 15 25 35 45

Фиг. 73.

к одномерному течению, движение газа имеет резко выраженный трёхмерный характер, однако общий вид кривых носит одинаковый характер. Сравнения с теорией до сих пор не сделано.

§ 5. Закон прямой линии Д. С. Вилькера.

Д. С. Вилькер вывел из своих опытных диаграмм (фиг. 68 и фиг. 72) следующий закон: *суммарный дебит скважины есть линейная функция от остаточного давления в пласте вдали от забоя скважины*[1]). Аналитически это выражается уравнением

$$Q = A - Bp, \tag{5.1}$$

где A и B суть постоянные, зависящие от начального давления, структуры пласта и положения забоя скважины. В системе координат Q, p уравнение (5.1) изображается прямой линией.

§ 6. Новые опыты в МГУ над движением воздуха через пористую среду.

В 1938 г. в Гидродинамической лаборатории Московского государственного университета Д. С. Вилькер произвёл весьма ценные опыты над взаимодействием двух скважин в одномерном газовом пласте. Для этой цели был смонтирован из железных трёхдюймовых труб горизонтально расположенный трубопровод, заполненный люберецким кварцевым песком (тем же, что и в предыдущих опытах). Длина искусственного пласта составляла $L = 144{,}14$ *м*, объём пласта был равен $V = 534\,768$ *см*^{3}, вес песка был $G = 967$ *кг*.

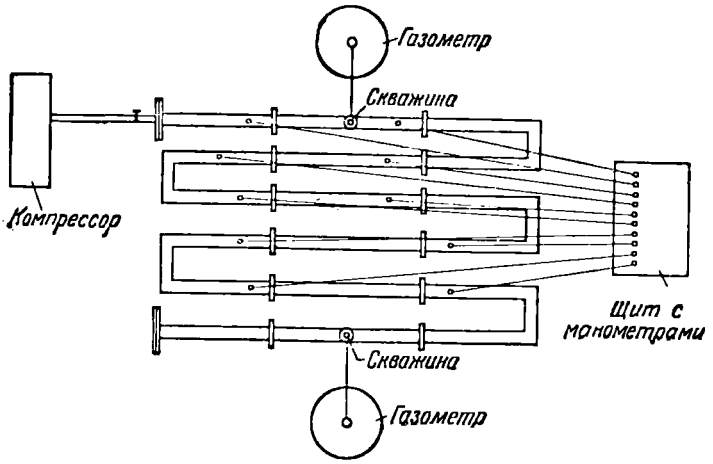
По длине пласта в одиннадцати его точках были установлены трубки для отбора давления. Штуцеры были присоединены к ртутным манометрам, собранным на одном щите.

В качестве скважин были взяты трубки в 10 *мм* диаметром, расположенные на разных расстояниях друг от друга и соединённые, каждая порознь, с газометрами, которые, как и в предыдущих работах, служили для измерения расхода воздуха.

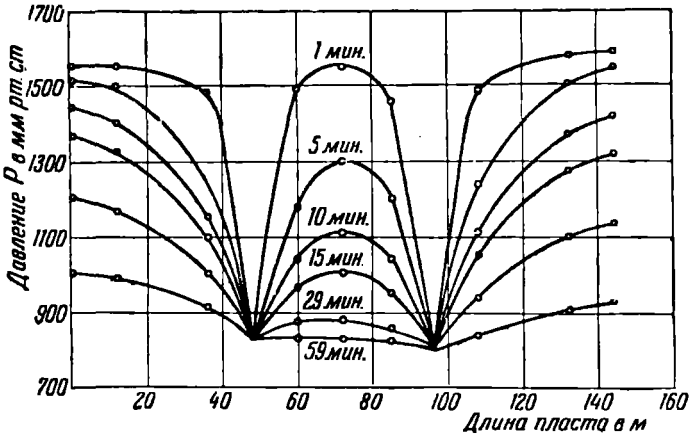
---

[1]) В цитированной выше докторской диссертационной работе Б. Б. Лапука её автор, используя понятие средневзвешенного по объёму пластового давления, дал теоретическое истолкование и более правильную формулировку «закона прямой линии» Д. С. Вилькера.

Схема установки представлена на фиг. 74. На описанной установке были проведены следующие три серии опытов:



Фиг. 74.



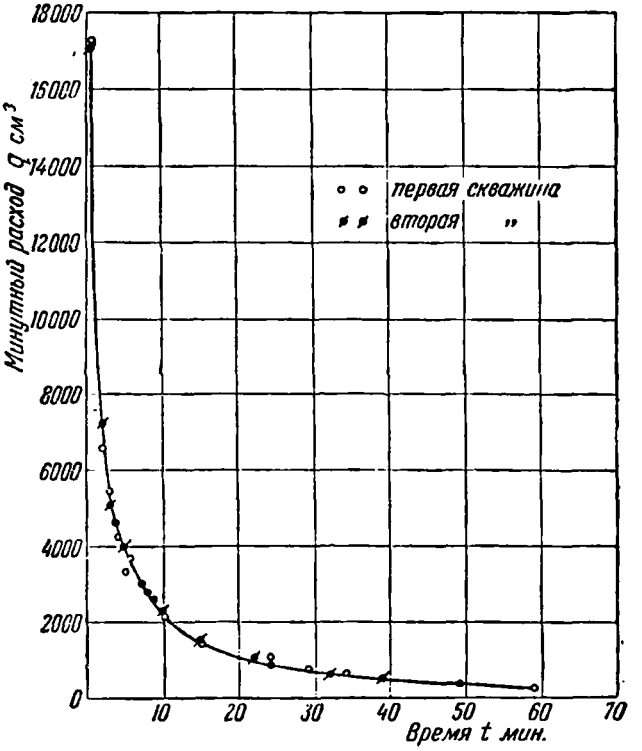
Фиг. 75.

1) две скважины расположены на расстоянии 144 *м* друг от друга (около концов пласта); 2) две скважины расположены

на расстоянии 72 *м* друг от друга и 3) две скважины расположены на расстоянии 48 *м* друг от друга.

Каждая серия наблюдений производилась при начальном давлении от 2 до 9 *ата*.

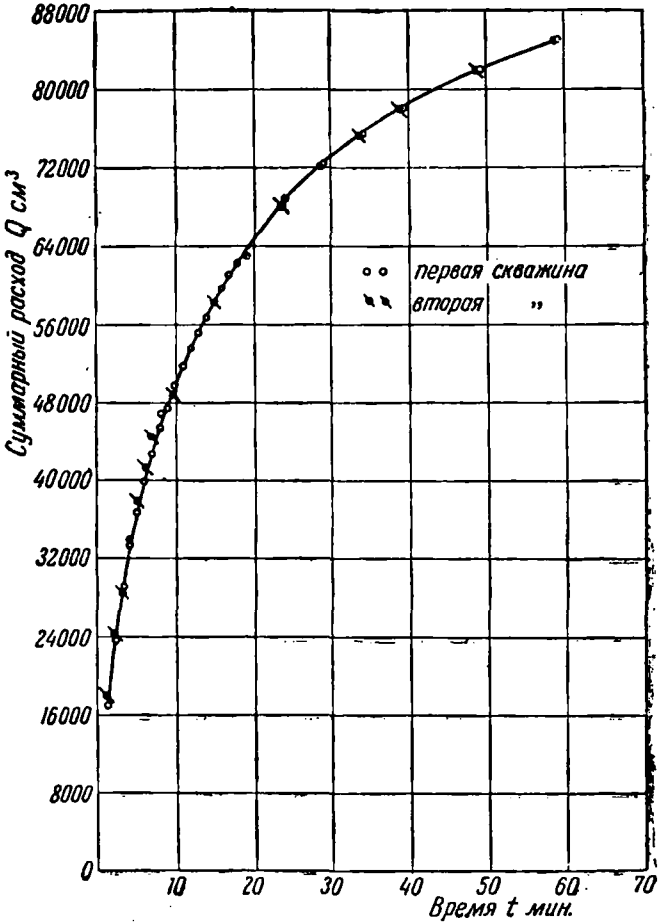
Одно из наблюдений (случай начального давления 2 *ата*) над взаимодействием двух скважин, расположенных на расстоя-



Фиг. 76.

нии 48 *м* друг от друга, представлено на фиг. 75, 76 и 77. На фиг. 75 дано изменение давления по длине пласта и во времени при истечении воздуха из двух скважин; на фиг. 76 — изменение минутного расхода воздуха для каждой скважины и на фиг. 77 — изменение суммарного расхода воздуха для

каждой скважины. Аналогичный вид имеют кривые и для других случаев наблюдений.



Фиг. 77.

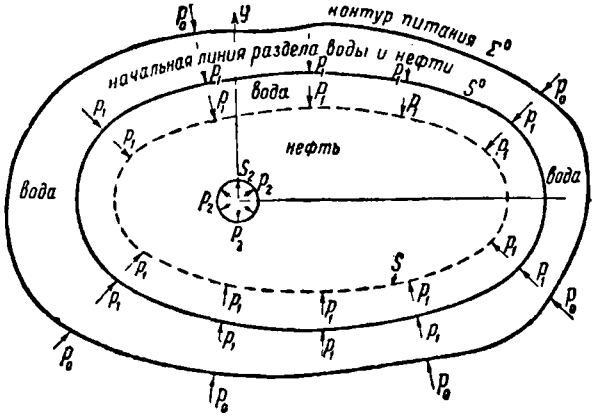
Построенные на фиг. 75, 76 и 77 графики отлично согласуются с теорией одномерного движения газа, развитой в главе VII.

ГЛАВА IX.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РЕЖИМ.

§ 1. Постановка проблемы.

Предположим, что *мёртвая нефть* (негазированная несжимаемая жидкость) занимает некоторую часть пласта (пористой среды), а остальная часть пласта заполнена несжимаемой водой (краевая вода). Водяная часть пласта (фиг. 78) ограни-



Фиг. 78.

чена определённым контуром Σ^0, который мы назовём *контуром питания* и на котором заданы определённые (по какому-нибудь закону) значения давления жидкости.

Если в нефтеносную часть пласта проведена скважина S_2, то давление краевой воды будет вытеснять нефть из пласта в скважину. В этом случае мы имеем *чистый гидравлический*

режим, при котором движение нефти происходит единственно в силу давления краевой воды. Если же нефть до некоторой степени насыщена газом (*живая нефть*), то мы будем иметь *смешанный газово-гидравлический режим*, при котором истечение нефти из пласта в скважину будет происходить как вследствие давления краевой воды, так и вследствие упругости газа, растворённого в нефти и образующего благодаря падению давления по направлению к скважине газовые пузырьки. В общем случае давление p_1 краевой воды на контуре S^0 (фиг. 78) мы должны считать меняющимся от одной точки контура к другой, а также переменным и во времени. Величина давления p_0 на контуре питания Σ^0, как было уже сказано, есть заданная величина, неизменная во времени, но могущая меняться от одной точки контура питания к другой. В частности, она может быть постоянной по всему контуру питания. Точно так же давление p_2 по контуру скважины S_2 мы вообще должны считать переменным во времени, но, в частности, оно может быть постоянным по всему контуру скважины и неизменным во времени.

В применении к газовому месторождению мы должны поставить аналогичную задачу о вытеснении газа из пласта краевой водой.

§ 2. Одномерная проблема о вытеснении мёртвой нефти водой.

Пусть мы имеем призматический пласт поперечного сечения F (фиг. 79) и пусть в точке O — начале координат системы осей x, y — расположена скважина с давлением p_2. В начальный момент $t=0$ раздел нефти и воды есть плоскость в сечении A. Длину части пласта OA, занятую нефтью, мы обозначим через L_1. Течение пусть направлено от A к O. Всю часть пласта слева от сечения A мы предположим заполненной водой и пусть сечение BB есть контур питания, где вода находится под постоянным давлением p.

Обозначим линию раздела воды и нефти в какой-нибудь момент времени t через CC. Расстояние OC от начала O примем равным L, а гидродинамическое давление в плоскости раздела обозначим через p_1. Очевидно, L есть функция времени t, подлежащая определению. Давление жидкости в любой

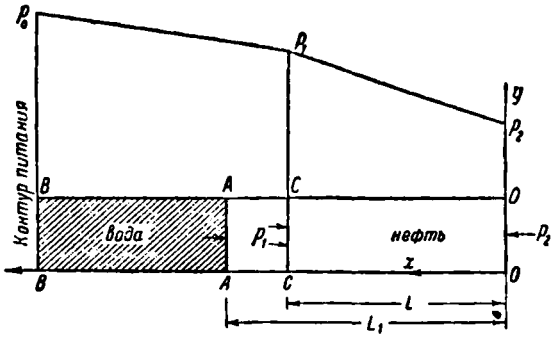
точке пласта будет определяться дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2p}{dx^2}=0. \tag{2.1}$$

Интеграл этого уравнения есть

$$p=C_1x+C_2. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что как в части пласта, занятой нефтью, так и в части, занятой водой, давление распределяется по закону прямой линии (фиг. 79).



Фиг. 79.

Будем рассматривать давления p_1 и p_0 как избыточные над давлением p_2, т. е. примем в наших рассуждениях $p_2=0$.

Определяя постоянные C_1 и C_2 из граничных условий в области, занятой нефтью, мы найдём, что распределение давления определяется уравнением

$$p=\frac{p_1}{L}x, \tag{2.3}$$

а в области, занятой водою, — уравнением

$$p=\frac{p_0-p_1}{L_0-L}(x-L)+p_1. \tag{2.4}$$

Скорость фильтрации, согласно закону Дарси, равна

$$u=\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dx}. \tag{2.5}$$

Обозначим для нефти абсолютную вязкость через μ_1, а проницаемость пласта — через k_1, для воды абсолютную вязкость — через μ_2, а проницаемость пласта — через k_2. Подставляя значения давления p из (2.3) и (2.4) в (2.5), мы будем иметь следующее выражение скорости фильтрации:

$$u = \frac{k_1}{\mu_1}\frac{p_1}{L} = \frac{k_2}{\mu_2}\frac{p_0 - p_1}{L_0 - L}. \tag{2.6}$$

Другое выражение скорости фильтрации мы получим в виде

$$u = -m\frac{dL}{dt}. \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.6) мы найдём величину p_1:

$$p_1 = \frac{k_2}{\mu_2}\frac{p_0}{L_0 - L}\frac{1}{\left[\frac{k_1}{\mu_1}\frac{1}{L} + \frac{k_2}{\mu_2}\frac{1}{(L_0 - L)}\right]}. \tag{2.8}$$

Из уравнений (2.6) и (2.7) мы имеем

$$-m\frac{dL}{dt} = \frac{k_1}{\mu_1}\frac{p_1}{L}. \tag{2.9}$$

Подставляя сюда p_1 из (2.8), мы получим дифференциальное уравнение

$$-m\frac{dL}{dt} = \frac{k_1}{\mu_1}\frac{k_2}{\mu_2}\frac{p_0}{\left[\frac{k_1}{\mu_1}(L_0 - L) + \frac{k_2}{\mu_2}L\right]}. \tag{2.10}$$

Интегрирование этого уравнения даёт

$$-\frac{k_1}{\mu_1}(L_0 - L)^2 + \frac{k_2}{\mu_2}L^2 = -\frac{2k_1}{\mu_1}\frac{k_2}{\mu_2}\frac{p_0}{m}(t - C). \tag{2.11}$$

Произвольную постоянную C мы определим из условия, что $L = L_1$ при $t = 0$, что даёт

$$C = \frac{1}{2}\frac{\mu_1}{k_1}\frac{\mu_2}{k_2}\frac{m}{p_0}\left[\frac{k_2}{\mu_2}L_1^2 - \frac{k_1}{\mu_1}(L_0 - L_1)^2\right]. \tag{2.12}$$

Внося (2.12) в интеграл (2.11), мы получим

$$\frac{k_1}{\mu_1}[(L_0 - L)^2 - (L_0 - L_1)^2] + \frac{k_2}{\mu_2}(L_1^2 - L^2) = \frac{2k_1}{\mu_1}\frac{k_2}{\mu_2}\frac{p_0}{m}t. \tag{2.13}$$

Перейдём к пределу, когда вязкость воды ничтожна по отношению к вязкости нефти. В этом случае имеем

$$L_1^2 - L^2 = 2k_1 \frac{p_0}{m} \frac{1}{\mu} t. \tag{2.14}$$

Именно этот случай был рассмотрен нами в 1934 г.[1]). Более общий случай исследован впоследствии американским физиком Маскатом, а также В. Н. Щелкачёвым.

Если T есть время, за которое нефть вытекает из пласта, то мы имеем $L = 0$ при $t = T$. Внося это значение t в уравнение (2.14), мы получим

$$L_1^2 = 2k_1 \frac{p_0}{m} \frac{1}{\mu} T. \tag{2.15}$$

Разделив уравнение (2.14) на (2.15), мы будем иметь

$$1 - \frac{L^2}{L_1^2} = \frac{t}{T}.$$

Отсюда находим

$$L = L_1 \sqrt{1 - \frac{t}{T}}. \tag{2.16}$$

§ 3. Общая постановка проблемы о вытеснении краевой водой мёртвой нефти из пласта небольшой толщины.

Пусть мёртвая нефть занимает пласт постоянной толщины h, ограниченный в начальный момент контуром S^0 (фиг. 80). Обозначим через k_1 проницаемость этой области пласта, а через μ_1 — абсолютную вязкость нефти. Если толщина h пласта будет малой, то движение жидкости можно принять двухмерным.

Примем, что ось скважины радиуса ρ проходит через нефтеносную часть пласта. Точку пересечения O оси скважины с плоскостью основания пласта примем за начало координат системы осей x, y, плоскость которой xy совпадает с основанием пласта. Гидродинамическое давление нефти $p(x, y, t)$, как известно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \tag{3.1}$$

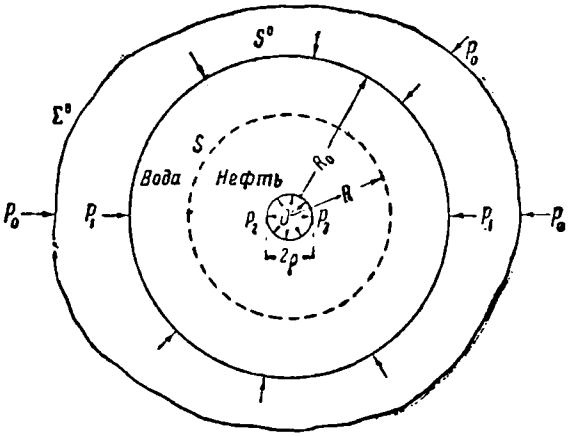
---

[1]) Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, часть вторая (Подземная гидравлика воды, нефти и газа), стр. 296. Москва 1934.

Составляющие скорости фильтрации мёртвой нефти будут равны [см. уравнения (2.2) главы II]

$$u = -\frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -\frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{3.2}$$

Вода, заполняющая остальную часть пласта, пусть имеет абсолютную вязкость μ_2 и пусть проницаемость этой части пласта равна k_2. Гидродинамическое давление в этой части пласта тоже будет удовлетворять уравнению (3.1).



Фиг. 80.

Мы примем, что водяная часть пласта ограничена контуром питания Σ^0, давление на котором пусть будет постоянным и равным p_0. Вода и нефть в какой-нибудь момент будут разграничены контуром S, который перемещается, деформируясь при этом по направлению к скважине.

Обозначим давление на границе воды и нефти, т. е. на контуре S, через p_1. Оно будет меняться в зависимости от положения на контуре и от времени.

На контуре питания Σ^0 мы имеем граничное условие

$$p = p_0.$$

На подвижной границе воды и нефти S мы имеем два граничных условия:

1) $p = p_1$, (3.3)

где p_1 есть общее давление на границе воды и нефти;

2) $(v_в)_n = (v_н)_n$, (3.4)

где $(v_в)_n$ и $(v_н)_n$ — проекции на направление нормали к контуру S скоростей движения воды и нефти.

На контуре скважины имеем граничное условие

$$p = p_2 \text{ при } r = \rho. \tag{3.5}$$

Дебит скважины равен

$$G = \frac{2\pi k_1 h}{\mu_1} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{r=\rho} ds, \tag{3.6}$$

где интеграл взят по контуру скважины $r = \rho$, величина $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{r=\rho}$ есть значение нормальной производной давления $p(x, y, t)$ на контуре скважины, а ds есть элемент контура скважины.

Поставленная таким образом задача представляет большие математические трудности. Вполне разрешается случай, когда контур питания Σ^0 и начальный контур области S^0, заключающий нефть, представляют собой концентрические окружности, в центре которых расположена скважина.

§ 4. Вытеснение краевой водой мёртвой нефти из круглой линзы постоянной толщины.

Рассмотрим простейший случай, когда вязкость воды очень мала по сравнению с вязкостью нефти, как это было принято в конце § 2. В этом случае давление p_0 на контуре питания будет без изменения передаваться к линии раздела воды и нефти, следовательно, на контуре S будет

$$p_0 = p_1 = \text{const}. \tag{4.1}$$

Предположим, что в пласте постоянной толщины h нефть заполняет первоначально объём круглого цилиндра радиуса R *(круглая линза)*, ось которого примем за ось скважины. Пусть перфорированная труба скважины проходит через всю толщу пласта, которую мы примем небольшой, вследствие чего течение в пласте можно будет рассматривать как двухмерное. Давление краевой воды мы будем считать постоянным и равным p_1, а давление в скважине, куда истекает нефть из

пласта, также примем постоянным и равным p_2. Радиус скважины обозначим через ρ, переменный радиус нефтяной круглой линзы обозначим через R (фиг. 80). Расстояние какой-нибудь точки внутри линзы от оси обозначим через r, причём $r^2 = x^2 + y^2$. Давление мёртвой нефти будет функцией расстояния r и времени t

$$p = p(r, t).$$

Оно будет определяться из дифференциального уравнения (3.1). Составляющие скорости фильтрации по направлениям x и y будут равны

$$u = -\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{4.2}$$

а по направлению l

$$v_l = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial l}. \tag{4.3}$$

Так как в рассматриваемом случае движение нефти будет симметричным относительно оси цилиндра, то уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{4.4}$$

а радиальная скорость будет, согласно (4.3), равна

$$v_r = -\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{4.5}$$

Граничными условиями будут

$$\left.\begin{aligned} p &= p_2 \quad \text{при} \quad r = \rho, \\ p &= p_1 \quad \text{при} \quad r = R, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

$$-m\frac{dR}{dt} = \frac{k_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R}. \tag{4.7}$$

Начальным условием будет

$$R = R_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{4.8}$$

Интеграл уравнения (4.4), удовлетворяющий граничным условиям (4.6), имеет вид

$$p = p_2 + \frac{p_1 - p_2}{\ln\frac{R}{\rho}}\ln\frac{r}{\rho}. \tag{4.9}$$

Величина R, зависящая от времени t, подлежит определению. Внося (4.9) в (4.7), мы получим

$$-m\frac{dR}{dt}=\frac{k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 R\ln\frac{R}{\rho}}. \tag{4.10}$$

Из (4.10), разделяя переменные, имеем

$$\ln\left(\frac{R}{\rho}\right)R\,dR=-\frac{k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 m}\,dt. \tag{4.11}$$

Если ввести новое переменное

$$z=\left(\frac{R}{\rho}\right)^2, \tag{4.12}$$

то дифференциальное уравнение (4.11) примет вид

$$\frac{1}{4}\rho^2\ln z\,dz=-\frac{k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 m}\,dt.$$

Интегрирование этого уравнения даёт

$$z\ln z-z+C=\frac{4k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 m\rho^2}t. \tag{4.13}$$

Произвольная постоянная C определяется из начального условия (4.8), которое принимает теперь вид

$$z=z_0=\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 \text{ при } t=0. \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) мы получаем

$$-C=z_0(\ln z_0-1). \tag{4.15}$$

Внося (4.15) в (4.13), мы найдём

$$z(\ln z-1)=z_0(\ln z_0-1)-\frac{4k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 m\rho^2}t. \tag{4.16}$$

Из (4.16) мы определим z, а следовательно, и R как функцию времени t. Однако получить R как явную функцию времени t нельзя, так как уравнение (4.16) есть трансцендентное уравнение. Поэтому необходимо удовлетвориться только численным решением уравнения (4.16) для заданного значения отношения

$$\vartheta=\frac{k_1(p_1-p_2)}{\mu_1 m\rho^2}. \tag{4.17}$$

Если ввести обозначение

$$\psi(z) = z(\ln z - 1), \tag{4.18}$$

то уравнение (4.16) примет вид

$$\psi(z_0) - \psi(z) = 4\vartheta t. \tag{4.19}$$

Дебит скважины будет равен

$$G = 2\frac{\pi\rho h k_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=\rho} \tag{4.20}$$

или, внося значение $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=\rho}$,

$$G = \frac{4\pi k_1 h (p_1 - p_2)}{\mu_1 \ln z}. \tag{4.21}$$

Время T, за которое вся нефть вытечет из пласта в скважину, а следовательно, краевая вода прорвётся к забою, очевидно, получится из условия

$$t = T \quad \text{при } R = \rho. \tag{4.22}$$

В этом случае, согласно (4.12), имеем

$$z = 1. \tag{4.23}$$

Подставляя (4.18), (4.22) и (4.23) в (4.19), мы получим

$$T = \frac{\psi(z_0) + 1}{4\vartheta}. \tag{4.24}$$

Более общий случай, когда вязкости воды и нефти сравнимы между собой и контуры Σ^0 и S^0 не совпадают друг с другом, рассмотрен в работах Муската и В. Н. Щелкачёва, появившихся после опубликования наших результатов.

§ 5. Общий случай вытеснения краевой водой нефти из линзы некругового очертания (приближённое аналитическое решение).

Предполагая, что толщина h линзы небольшая, мы будем иметь в пласте, по направлению к скважине, двухмерное движение нефти.

Расположение координат примем такое же, как и в § 3. Гидродинамическое давление нефти $p(x, y, t)$ будет удовле-

творять уравнению (3.1). Составляющие скорости фильтрации нефти будут равны

$$u = -\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x};\quad v = -\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Граничные условия будут

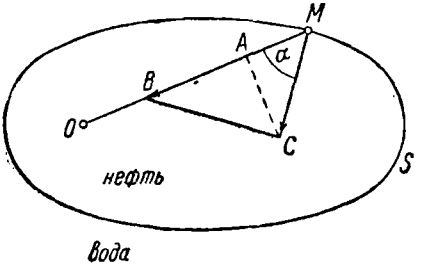
$$p = p_2 \text{ при } r = \rho \quad \text{(скважина)}, \tag{5.1}$$

$$p = p_1 \text{ на контуре } S, \tag{5.2}$$

$$(v_в)_n = (v_н)_n = w_n \text{ на контуре } S, \tag{5.3}$$

где $(v_в)_n$ и $(v_н)_n$ — проекции на направление нормали к контуру S скоростей движения нефти и воды; w_n — их общая величина на контуре S.

При этом предполагается, что вязкость краевой воды ничтожна по сравнению с вязкостью нефти и давление p_1 постоянно.



Фиг. 81.

Точное решение поставленной таким образом задачи представляет большие трудности, и возможно только приближённое решение.

Пусть на фиг. 81 скважина O расположена произвольно внутри овального контура S, представляющего границу воды и нефти. При вытеснении краевой водой нефти точка M контура перемещается по нормали MC к контуру со скоростью

$$w_n = MC.$$

Приближённо эту скорость можно рассматривать как проекцию на нормаль скорости

$$w = \overline{MB},$$

с которой происходила бы чисто радиальная фильтрация от M к скважине O по радиусу-вектору $\overline{MO}$. Проекция скорости w_n на направление переменного радиуса-вектора $R = MO$ равна

$$MA = w_r = \frac{\partial R}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Если α есть угол между радиусом-вектором $\overline{MO}$ и нормалью $\overline{MC}$, то

$$\frac{\partial R}{\partial t} = w_n \cos\alpha, \tag{5.5}$$

$$w_n = w\cos\alpha. \tag{5.6}$$

Отсюда имеем основную формулу

$$\frac{\partial R}{\partial t} = w\cos^2\alpha. \tag{5.7}$$

Но согласно теории радиальной фильтрации [см. (4.7)] мы имеем

$$w = \frac{k}{\mu m}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R} \tag{5.8}$$

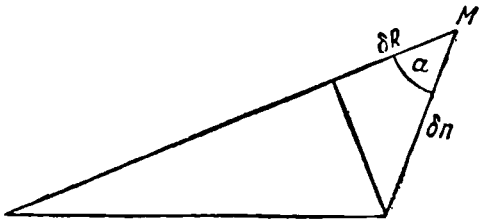
Внося (5.8) в (5.7), мы получим фундаментальное соотношение

$$-m\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R}\cos^2\alpha, \tag{5.9}$$

которое мы можем рассматривать как граничное условие на контуре S.

В самом деле, обратимся к формуле (3.4). Внесём в неё, согласно фиг. 82,

$$\delta R = \delta n\cos\alpha. \tag{5.10}$$



Фиг. 82.

Тогда, учитывая соотношение (2.3) главы I, легко получим следующее равенство:

$$-m\frac{\frac{\delta R}{\cos\alpha}}{\delta t} = \frac{k}{\mu}\frac{\delta p}{\frac{\delta R}{\cos\alpha}},$$

откуда

$$-m\frac{\delta R}{\delta t} = \frac{k}{\mu}\frac{\delta p}{\delta R}\cos^2\alpha, \tag{5.11}$$

что согласуется с (5.7).

Из геометрии имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2}, \tag{5.12}$$

где φ — полярный угол. Внося (5.12) в (5.9), получим

$$-\frac{\mu m}{k}\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R}. \tag{5.13}$$

Предположим, что движение от точки M к O в первом приближении можно рассматривать как радиальное; тогда для определения давления можно будет применить формулу (4.9). Из неё мы находим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{p_1 - p_2}{R \ln \frac{R}{\rho}}. \tag{5.14}$$

Внося (5.14) в (5.13), мы получим окончательное соотношение на контуре S, т. е. на границе между водой и нефтью

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\frac{k(p_1 - p_2)}{m\mu} R}{\left[R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2\right] \ln \frac{R}{\rho}} = 0, \tag{5.15}$$

причём предполагается, что R есть и функция времени, и функция полярного угла φ, т. е.

$$R = R(t, \varphi). \tag{5.16}$$

§ 6. Приближённое графическое решение задачи, поставленной в § 5.

Для решения поставленной в § 5 задачи мы можем применить простое графическое построение, основанное на идее приближённого радиального решения, которым мы воспользовались в начале § 4.

Пусть дан контур S, окружающий скважину радиуса ρ с центром O (фиг. 83). Разделим длину контура S на n одинаковых частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ и проведём

из точки O в точки $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}, C_n$, служащие серединами элементов

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1,$$

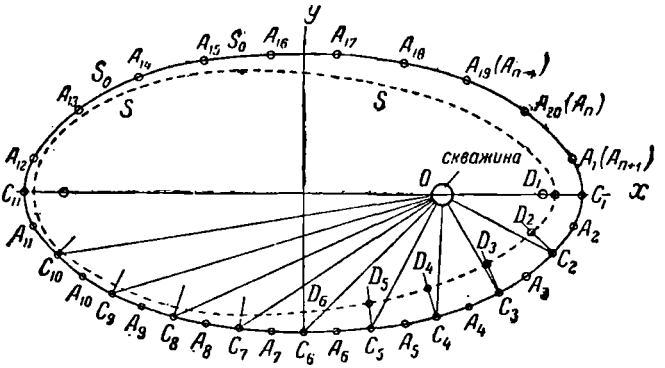
радиусы-векторы

$$R_1=\overline{OC}_1,\ R_2=\overline{OC}_2,\ \ldots,\ R_n=\overline{OC}_n.$$

Затем проведём нормали к контуру S

$$C_1D_1,\ C_2D_2,\ C_3D_3,\ \ldots,\ C_nD_n$$

и отложим на них отрезки, пропорциональные нормальным составляющим скорости w_n.



Фиг. 83.

Как мы видели в § 5, скорость фильтрации w_n по нормали к контуру S определяется равенством (5.6), причём w следует взять согласно (5.8), которая вследствие (4.9) даёт

$$w=\frac{k(p_1-p_2)}{\mu mR\ln\dfrac{R}{\rho}}. \tag{6.1}$$

Из (6.1) и (5.6) имеем

$$w_n=\frac{k(p_1-p_2)}{\mu mR\ln\left(\dfrac{R}{\rho}\right)\cos\alpha}, \tag{6.2}$$

где α есть угол между нормалью n к контуру S и радиусом-вектором R.

Следовательно, на упомянутых нормалях мы отложим отрезки, пропорциональные величинам:

в точке C_1

$$w_n = \frac{k(p_1 - p_2)}{\mu m \left(\frac{R_1}{\rho}\right) \ln\left(\frac{R_1}{\rho}\right) \cos(R_1, n_1)},$$

в точке C_2

$$w_n = \frac{k(p_1 - p_2)}{\mu m \left(\frac{R_2}{\rho}\right) \ln\left(\frac{R_2}{\rho}\right) \cos(R_2, n_2)}$$

и т. д.

Соединяя полученные точки

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n,$$

мы найдём первое положение контура S. Затем мы можем повторить построение. Таким образом, можно получить графически решение для произвольной формы контура S.

§ 7. Вытеснение газа краевой водой.

Вопрос о вытеснении газа краевой водой из пласта небольшой постоянной толщины имеет чрезвычайно важное значение в теории разработки газовых месторождений.

Сохраняя обозначения фиг. 78, мы примем, что водяная часть пласта ограничена контуром питания Σ^0, давление жидкости на котором постоянно и равно p_0. Пусть в начальный момент времени вода и газ разграничены контуром S^0 при давлении p_0', и в какой-нибудь произвольный момент времени они разграничены контуром S, который при вытеснении газа водой подвигается ближе к скважине. Давление воды на контуре раздела S примем равным p_1; давление на контуре скважины S_2 пусть будет p_2.

В случае пласта небольшой постоянной толщины h давление воды p удовлетворяет уравнению (3.1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{7.1}$$

Составляющие скорости фильтрации воды по аналогии с (3.2) будут равны:

$$u = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{7.2}$$

где μ_1 — абсолютная вязкость воды, а k — проницаемость части пласта, занятого водой.

Давление воды p на контуре питания Σ^0 мы для простоты примем постоянным. Отсюда имеем первое граничное условие

$$p = p_0 \text{ на контуре питания } \Sigma^0. \tag{7.3}$$

На подвижном контуре раздела S, представляющем границу воды и газа, давление p_1 зависит от времени и вообще меняется от одной точки контура к другой. Отсюда имеем второе граничное условие для воды

$$p = p_1 \text{ на } S. \tag{7.4}$$

Третье граничное условие для жидкости представляет уравнение расхода на подвижном контуре, отнесённое к единице длины на элементе контура S

$$-m\left(\frac{\partial n_0}{\partial t}\right) = \frac{k}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial n_0}\right) \text{ на } S, \tag{7.5}$$

причём dn_0 есть элемент внешней нормали к контуру S, а m есть пористость пласта.

На основании формул § 9 главы VII мы имеем уравнение движения газа в пласте проницаемости k

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{D}{p}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{7.6}$$

где D дано формулой (3.2) главы VII

$$D = \frac{m\mu}{nk}, \tag{7.7}$$

причём μ есть абсолютная вязкость газа. Компоненты скорости фильтрации газа будут [см. (9.2) главы VII]:

$$\left.\begin{aligned} \rho u &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu}\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho v &= -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu}\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Следовательно, весовой дебит скважины G [см. (9.3) главы VII] будет равен

$$G = \frac{knh\varrho}{\beta(n+1)\mu}\oint \frac{\partial P}{\partial r}\,ds, \tag{7.9}$$

где интеграл взят по окружности скважины, а радиус-вектор проведён из центра скважины.

Первое граничное условие для газа, согласно (7.4), запишется так:

$$P = P_1 = p_1^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{на} \quad S. \tag{7.10}$$

На контуре скважины имеем второе граничное условие

$$p = p_2 \quad \text{на} \quad S_2, \tag{7.11}$$

что приводит к условию

$$P = P_2 = p_2^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{на} \quad S_2, \tag{7.12}$$

Третье граничное условие для газа представляет уравнение расхода на подвижном контуре S:

$$-m\left(\frac{\partial n_0}{\partial t}\right) = \frac{kn}{\rho_1 \mu \beta (n+1)}\left(\frac{\partial P}{\partial n_0}\right) \quad \text{на} \quad S, \tag{7.13}$$

где ρ_1 есть плотность газа при давлении p_1.

Согласно формуле (1.6) главы VII мы имеем

$$\beta \rho_1 = P^{\frac{1}{n+1}}. \tag{7.14}$$

Внося (7.14) в (7.13), мы получим условие на подвижном контуре

$$-m\left(\frac{\partial n_0}{\partial t}\right) = \frac{knP^{-\frac{1}{n+1}}}{\mu (n+1)}\left(\frac{\partial P}{\partial n_0}\right) \quad \text{на} \quad S. \tag{7.15}$$

Кроме того, мы имеем начальное условие в области воды и газа. Например, мы можем принять простейшее начальное условие

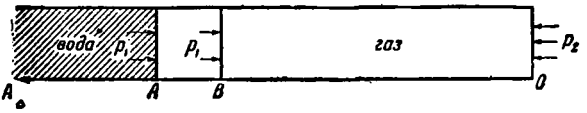
$$p = p_0 \quad \text{для} \quad t = 0. \tag{7.16}$$

Рассмотрим простейший случай горизонтального призматического пласта (фиг. 84) поперечного сечения F. В сечении O (ось Ox мы направим против течения газа), где мы поместим начало координат, пусть происходит истечение

газа из пласта в скважину при постоянном давлении p_2. Пусть в начальный момент $t=0$ разделом между газом и водой служит сечение A, причём $OA=L_0'$.

Расстояние от скважины до контура питания A_0 мы обозначим через L_0, причём $OA_0=L_0\,(L_0>L)$.

В какой-нибудь момент времени t граница между водой и газом есть сечение B, отстоящее от скважины на расстоянии $OB=L$, причём L есть функция времени t, подлежащая определению.



Фиг. 84.

Поставленная здесь задача гораздо сложнее задачи, решённой в § 2 этой главы.

Для воды мы имеем условия:

$$\left.\begin{aligned} p&=p_0 \quad \text{для} \quad x=L_0,\\ p&=p_1 \quad \text{для} \quad x=L. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Уравнение (7.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0,$$

интеграл которого, удовлетворяющий условиям (7.17), будет

$$p=\frac{p_0-p_1}{L_0-L}\,x+\frac{p_1L_0-p_0L}{L_0-L}\,. \tag{7.18}$$

Следует заметить, что эта форма интеграла не удовлетворяет заданному начальному условию. То же самое следует сказать и об интеграле (2.4).

При решении уравнения движения газа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{D}{p}\,\frac{\partial P}{\partial t} \tag{7.19}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1 \quad \text{для} \quad x = L, \\ P &= P_2 \quad \text{для} \quad x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

и при уравнении расхода (при $x = L$)

$$-m\frac{dL}{dt} = \frac{k}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 = \frac{kn}{\mu(n+1)}P_1^{-\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_1 \tag{7.21}$$

мы встретимся с весьма значительными математическими трудностями.

В другой работе[1]) нами была сделана попытка приближённого решения поставленной задачи в простейшей гипотезе постоянства давления p_1. Это решение пригодно только в случае медленного вытеснения газа водою, когда в первом приближении перемещением границы раздела воды и газа в течение коротких промежутков времени можно пренебречь.

Если же в самом грубом приближении считать движение газа на переменной длине OB в течение коротких промежутков времени за установившееся, то уравнение (7.19) примет вид:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \tag{7.22}$$

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющей граничным условиям (7.20), будет

$$P = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L}x; \tag{7.23}$$

при этом начальные условия не будут удовлетворены.

---

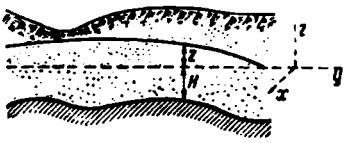
[1]) Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. 2 (Подземная гидравлика воды, нефти и газа), глава XII, § 9 и 10.

ГЛАВА X.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Уравнение Буссинеска для неглубокой воды.

В этой главе мы будем рассматривать движение несжимаемой жидкости в пористой среде под действием силы тяжести. Пористая среда, по которой движется несжимаемая жидкость, представляет собой пласт, подстилаемый непроницаемым грунтом. Предполагается, что жидкость занимает лишь часть толщины пласта и имеет свободную поверхность, над которой существует постоянное давление воздуха или газа. При откачке жидкости из пласта через скважины или сборные галлереи первоначальный уровень в пласте изменяется, и свободная поверхность жидкости понижается по направлению к скважине. В гидравлике её называют *депрессионной поверхностью* (а иногда водяным зеркалом). В этом параграфе мы будем предполагать, что толщина нашего пласта незначительна по сравнению с его длиной и шириной. Плоскость отсчёта Oxy совместим с некоторой горизонтальной плоскостью (фиг. 85). Ось Oz направим вертикально вверх. Глубина подстилающего пласта (дно) под плоскостью Oxy будет функцией $H(x, y)$ координат x, y, относительно которой сделаем предположение, что она изменяется непрерывно и очень медленно на всём протяжении пласта, следовательно, частные производные $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$ будут



Фиг. 85.

малыми величинами. Уравнением дна пласта будет

$$z = -H(x, y). \tag{1.1}$$

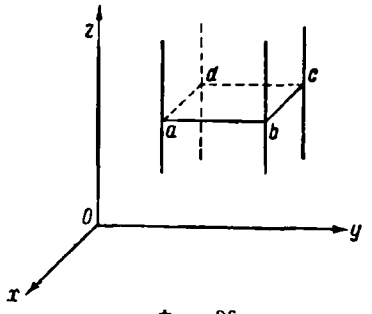
Высота h свободной поверхности жидкости в пласте над плоскостью отсчёта тоже есть функция координат x, y и изменяется непрерывно и очень медленно на всём протяжении пласта. Следовательно, уравнением свободной поверхности жидкости в пласте будет

$$z = h(x, y), \tag{1.2}$$

причём частные производные $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ суть малые величины и представляют собой гидравлические уклоны при движении жидкости.

Вследствие сделанных предположений элементарные струйки жидкости при её фильтрации в пласте будут *почти горизонтальными*.

Для составления уравнения неразрывности выделим в пласте элементарный параллелепипед, получаемый следующим образом: через стороны элементарного прямоугольника $abcd$ (фиг. 86), расположенного в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости Oxy, проведём вертикальные плоскости до пересечения с непроницаемым подстилающим пластом и со свободной поверхностью воды. Тогда, обозначая через u составляющую скорости течения несжимаемой жидкости под действием силы тяжести вдоль оси x, мы найдём, что через грань ad за элемент времени dt войдёт количество жидкости



Фиг. 86.

$$u(H + h)\,dy\,dt,$$

а через грань bc выйдет за то же время количество жидкости

$$u(H + h)\,dy\,dt + \frac{\partial}{\partial x}[u(H + h)\,dy\,dt]\,dx.$$

Следовательно, от движения вдоль оси x в элементарном параллелепипеде накопится количество жидкости

$$-\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]\,dx\,dy\,dt.$$

Аналогично, обозначая через v составляющую скорости течения вдоль оси y, мы найдём, что от движения вдоль оси Oy за то же время в параллелепипеде накопится количество жидкости

$$-\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]\,dx\,dy\,dt.$$

Движением по оси Oz можно пренебречь, так как мы предположили, что элементарные струйки горизонтальны. Таким образом, увеличение количества жидкости в параллелепипеде за время dt будет равно

$$-dx\,dy\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]\right\}. \quad (1.3)$$

Если на внешней поверхности грунта выпадают осадки в количестве $q(x, y)$ на единицу площади проекции этой поверхности на горизонтальную плоскость Oxy, то за время dt добавится количество жидкости

$$q\,dx\,dy\,dt.$$

Следовательно, полное накопление жидкости в параллелепипеде за время dt будет равно

$$-dx\,dy\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]-q\right\}. \quad (1.4)$$

С другой стороны, мы имеем, учитывая пористость, что объём жидкости в рассматриваемом параллелепипеде равен

$$m(H+h)\,dx\,dy,$$

следовательно, его приращение за время dt составляет

$$\frac{\partial}{\partial t}[m(H+h)\,dx\,dy]\,dt.$$

Но так как H не зависит от t, то это приращение в неизменяемой пористой среде будет равно

$$m\frac{\partial h}{\partial t}\,dx\,dy\,dt. \quad (1.5)$$

Сравнив выражения (1.4) и (1.5) одного и того же количества жидкости, накопляющейся в параллелепипеде, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]=-m\frac{\partial h}{\partial t}+q. \quad (1.6)$$

Вследствие горизонтальности элементарных жидких струек мы можем принять, что в нашей тяжёлой, очень медленно текущей жидкости давление определяется гидростатически, что даёт

$$p=g\rho(h-z)+\text{const}. \quad (1.7)$$

Для составляющих скорости тяжёлой, несжимаемой жидкости были выведены в § 5 главы II формулы (5.2). Внося (1.7) в (5.2), мы будем иметь

$$u=-\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v=-\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial h}{\partial y}, \quad w=0. \quad (1.8)$$

Внося (1.8) в (1.6), мы получим уравнение Буссинеска

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]= =\frac{m\mu}{g\rho}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\mu q}{g\rho}. \quad (1.9)$$

Если осадков нет ($q=0$) и проницаемость k есть величина постоянная, то уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=\frac{m\mu}{kg\rho}\frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.10)$$

В частном случае, когда отношение $\frac{h}{H}$ есть малая величина можно пренебречь h по сравнению с H, и уравнение (1.10) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{m\mu}{kg\rho}\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.11)$$

причём H есть функция от координат x, y. Выполняя дифференцирование, мы получим вместо уравнения (1.11) следующее:

$$H\nabla^2 h+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{m\mu}{g\rho k}\frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Так как функция $H(x, y)$ есть функция известная, следовательно, её частные производные $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$ суть тоже известные функции, то уравнение (1.12) есть линейное уравнение с частными производными относительно h. Следовательно, его решение может быть получено по известным правилам при заданных граничных и начальных условиях.

§ 2. Уравнение Дюпюи.

Если подстилающий непроницаемый пласт горизонтален, то его удобно принять за плоскость Oxy. Тогда будет

$$H = 0, \tag{2.1}$$

и расстояние от свободной поверхности жидкости до непроницаемого пласта (дна) будет равно h. Внося (2.1) в уравнение (1.10), мы получим уравнение Буссинеска

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[h\frac{\partial h}{\partial y}\right] = \frac{m\mu}{g\rho k}\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{2.2}$$

которое можно представить в виде

$$\nabla^2 h^2 = \frac{2m\mu}{g\rho k}\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.3}$$

В частном случае, когда движение установившееся, будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

и уравнение (2.3) принимает вид

$$\nabla^2 h^2 = 0. \tag{2.4}$$

Это важное уравнение впервые было дано французским инженером Дюпюи в его капитальных исследованиях по движению грунтовых вод [1]).

[1]) J. Dupuit, Etudes theoretiques et practiques sur le mouvement des eaux, Paris, 1863.

§ 3. Аналогия с движением газа.

Примем, что изменение состояния газа происходит по изотермическому закону [см. уравнение (6.17) главы II], и пренебрежём эффектом силы тяжести. Внося

$$\rho = \frac{p}{\beta}$$

в уравнение (4.9) главы II, мы получим уравнение ламинарного движения газа в пористой среде в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Сравнивая уравнения (2.2) с уравнением (3.1) для случая двухмерного ламинарного движения газа, мы обнаружим их полную тождественность, если учтём, что

$$p = g\rho h, \quad (3.2)$$

как и должно быть согласно формуле (1.7) для дна, где $z=0$. Начальные и граничные условия будут также тождественны.

§ 4. Уравнения Буссинеска для глубокой воды.

Если толщина пласта, по которому течёт несжимаемая жидкость, значительна, то уравнение (1.10) перестаёт быть верным и должно быть заменено другим уравнением. Буссинеск сделал это нижеследующим приёмом.

В § 5 главы II было введено понятие о напоре для тяжёлой жидкости, который определяется формулой (5.3) главы II:

$$\varphi = \frac{h}{g\rho}+z. \quad (4.1)$$

Там же было показано, что функция φ удовлетворяет, при $k=\text{const}$., уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (4.2)$$

и что составляющие скорости фильтрации тяжёлой жидкости выражаются формулами

$$u=-\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=-\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w=-\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Поэтому проекция скорости фильтрации на нормаль будет равна

$$w_n = -\frac{kg\rho}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \tag{4.4}$$

где

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(n, z). \tag{4.5}$$

Так как подстилающий слой определяется уравнением

$$z + H(x, y) = 0,$$

то для нормали к его поверхности имеем

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial H}{\partial x} : \frac{\partial H}{\partial y} : 1. \tag{4.6}$$

Так как жидкость не может проникнуть в подстилающий слой, то нормальная составляющая скорости фильтрации на поверхности этого слоя равна нулю, и поэтому, согласно (4.4), имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \tag{4.7}$$

Подставляя это значение $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в (4.5) и учитывая соотношения (4.6), мы получим для $z = -H(x, y)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{4.8}$$

Это есть первое условие Буссинеска, относящееся к поверхности подстилающего слоя.

На боковых стенках пласта, в котором течёт жидкость, имеет место равенство (4.7), — это второе условие Буссинеска.

Перейдём теперь к двум условиям на свободной поверхности жидкости внутри грунта. Прежде всего мы имеем здесь заданное постоянное давление. Поэтому на этой поверхности, заданной уравнением (1.2), мы имеем

$$p = \text{const.} \quad \text{для} \quad z = -h. \tag{4.9}$$

Но из уравнения (4.1) следует

$$p = g\rho(\varphi - z).$$

Внося это значение в (4.9), мы получим

$$\varphi(x, y, h) - h = \text{const}. \tag{4.10}$$

Это есть третье условие Буссинеска, имеющее место на свободной поверхности жидкости и позволяющее определить неизвестную величину h как функцию переменных (x, y).

Составим теперь уравнение, дающее зависимость h от времени t. Для этого на плоскости Oxy выделим элемент $d\sigma$, который является проекцией соответствующего элемента $d\Sigma$ на свободной поверхности жидкости внутри пласта. Если α есть угол нормали к этой поверхности, направленной во внешнюю по отношению к жидкости часть пласта, с положительной осью Oz, то имеем

$$d\sigma = d\Sigma \cos\alpha. \tag{4.11}$$

Три косинуса углов этой нормали с осями координат связаны соотношениями

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos\alpha = -\frac{\partial h}{\partial x} : -\frac{\partial h}{\partial y} : 1. \tag{4.12}$$

Согласно формуле (4.4) проекция скорости фильтрации на эту нормаль будет

$$w_n = \frac{kg\rho}{\mu}\cos\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{4.13}$$

Количество жидкости, протекающее снизу вверх через элемент $d\Sigma$ свободной поверхности за элемент времени dt, будет равно

$$dq = w_n d\Sigma\, dt. \tag{4.14}$$

Внося сюда значение w_n из равенства (4.13), мы получим на основании (4.11) выражение dq в виде

$$dq = \frac{kg\rho}{\mu}\, d\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{4.15}$$

Вследствие этого движения жидкости вверх высота h свободной поверхности за время dt возрастает на dh. Если m_0 есть поверхностное значение пористости [1]), то объём протекшей вверх через элемент $d\sigma$ (в плоскости, параллельной плоско-

[1]) Буссинеск считал, что объёмная пористость отличается от поверхностной. Можно этого различия не делать и считать, что m_0 есть объёмная пористость.

сти Oxy) жидкости за время dt будет равен

$$dq = m_0 d\sigma\, dh. \tag{4.16}$$

Сравнивая оба выражения (4.15) и (4.16) одного и того же количества жидкости, мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{m_0\mu}{kg\rho}\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{4.17}$$

Это есть четвёртое условие Буссинеска, имеющее место на свободной поверхности жидкости внутри пласта. Последнее, пятое, условие Буссинеска есть условие на стенках скважины или водосборной галлереи, например,

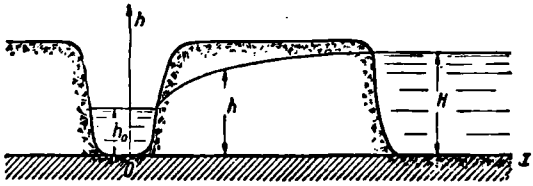
$$\varphi = \varphi_0, \tag{4.18}$$

где φ_0 есть заданная величина.

Пять условий Буссинеска (4.7), (4.8), (4.10), (4.17), (4.18) вполне определяют гармоническую функцию φ, удовлетворяющую уравнению (4.2), если в начальный момент времени $t = 0$ дана форма свободной поверхности жидкости внутри пласта. При этом предполагается, что проницаемость k пласта имеет постоянную величину, а движение несжимаемой жидкости происходит под действием тяжести.

§ 5. Плоская задача установившегося движения в неглубокой воде.

Непроницаемый подстилающий слой примем горизонтальным. Ось Ox расположим в плоскости этого слоя, а ось Oh



Фиг. 87.

направим вертикально вверх (фиг. 87). Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0,$$

откуда, интегрируя, получим

$$h^2 = C_1 x + C_2. \tag{5.1}$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 имеем два граничных условия:

$$h = h_0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$h = H \quad \text{при} \quad x = l,$$

что даёт

$$h_0^2 = C_2,$$
$$H^2 = C_1 l + C_2.$$

Определяя отсюда C_1 и C_2 и внося в (5.1), получим

$$h^2 = h_0^2 + \frac{H^2 - h_0^2}{l} x. \tag{5.2}$$

Количество протекающей жидкости будет равно

$$q = hu = \frac{kg\rho}{2\mu} \frac{dh^2}{dx}. \tag{5.3}$$

Внося сюда (5.2), найдём

$$q = \frac{kg\rho (H^2 - h_0^2)}{2l\mu}. \tag{5.4}$$

Из уравнений (5.2) и (5.4) получим уравнение Дюпюи

$$h^2 - h_0^2 = \frac{2g\mu x}{kg\rho}. \tag{5.5}$$

§ 6. Установившееся радиальное движение в неглубокой воде.

Пусть мы имеем неограниченный горизонтальный непроницаемый пласт и на нём — тоже неограниченный и горизонтальный — пористый пласт, по которому течёт несжимаемая жидкость, образуя свободную поверхность внутри пласта.

Плоскость раздела обоих пластов примем за плоскость Oxy, а ось Oz направим вверх. Так как движение установившееся, то высота h свободной поверхности, рассматриваемая как функция от x и y, удовлетворяет уравнению (2.4). Составляющие скорости фильтрации определяются формулами

(1.8). Составляющая скорости по направлению n будет равна

$$w_n = -\frac{hg\rho}{\mu}\frac{\partial h}{\partial n}. \tag{6.1}$$

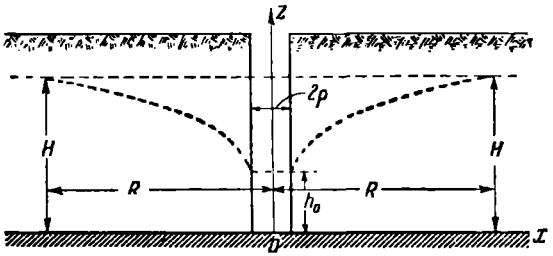
Дебит скважины с высотой уровня жидкости h будет равен

$$q = \oint w_n h\, ds, \tag{6.2}$$

где ds есть элемент дуги контура скважины. На основании формулы (6.1) получим из (6.2):

$$q = -\frac{kg\rho}{2\mu}\oint \frac{\partial h^2}{\partial n}\, ds. \tag{6.3}$$

Согласно взглядам гидравликов прошлого столетия высота h жидкости в пласте имеет при откачке из скважины наименьшее значение h_0 в самой скважине (фиг. 88) и растёт до



Фиг. 88.

своего наибольшего значения H, которое она получает на определённом расстоянии R от оси скважины. Это расстояние R, на котором жидкость достигает своей первоначальной высоты H, т. е. той высоты, которую она имела до начала откачки жидкости из скважины, называется *радиусом действия скважины*, потому что на бóльшем расстоянии свободная поверхность делается горизонтальной.

Поэтому граничными условиями будут:

$$\left.\begin{aligned} h &= h_0 \quad \text{при} \quad r = \rho, \\ h &= H \quad \text{при} \quad r = R, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

причём r есть расстояние от оси скважины. Так как функция h^2 удовлетворяет уравнению (2.4) и движение жидкости симме-

трично относительно оси скважины, которую мы примем за ось Oz, то интегралом уравнения (2.4) будет

$$h^2 = C_1 \ln r + C_2. \tag{6.5}$$

Подставляя (6.4) в (6.5), мы найдём

$$\left.\begin{aligned} C_1 \ln \rho + C_2 &= h_0^2, \\ C_1 \ln R + C_2 &= H^2, \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

отсюда определим постоянные C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \dfrac{R}{\rho}}, \\ C_2 &= \frac{h_0^2 \ln R - H^2 \ln \rho}{\ln \dfrac{R}{\rho}} \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Подставляя (6.5) в (6.3), мы получим для дебита скважины величину

$$q = \frac{\pi k g \rho}{\mu} \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \dfrac{R}{\rho}}. \tag{6.8}$$

Эта формула принадлежит Дюпюи.

§ 7. Упорядоченный режим Буссинеска.

Буссинеск, впервые получивший уравнение (2.3), указал частный интеграл его в виде произведения двух функций:

$$h = \varphi(x, y) \cdot \psi(t), \tag{7.1}$$

из которых одна зависит от координат, а другая — от времени. Внесём (7.1) в (2.3) и обозначим

$$\frac{2m\mu}{g\rho k} = A. \tag{7.2}$$

Тогда получим

$$\psi^2 \Gamma^2(\varphi^2) = A\varphi \frac{d\psi}{dt}.$$

Разделяя переменные, найдём

$$\frac{1}{\varphi}\nabla^2(\varphi^2)=\frac{A}{\psi^2}\frac{d\psi}{dt}=-\lambda, \tag{7.3}$$

где λ есть постоянная. Из (7.3) имеем два уравнения:

$$\nabla^2(\varphi^2)+\lambda\varphi=0, \tag{7.4}$$

$$\frac{d\psi}{\psi^2}=-\frac{\lambda\,dt}{A}. \tag{7.5}$$

Интегралом последнего уравнения будет

$$\frac{1}{\psi}=C_1+\frac{\lambda t}{A}. \tag{7.6}$$

Постоянная C_1 определяется из условия

$$\psi(0)=1, \tag{7.7}$$

что даёт

$$C_1=1.$$

Внося это значение в (7.6), получим

$$\psi=\frac{1}{1+\frac{\lambda t}{A}}. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.4) можно проинтегрировать для случая, когда φ зависит только от одного переменного. Тогда это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\varphi^2}{dx^2}+\lambda\varphi=0. \tag{7.9}$$

Умножив обе части (7.9) на

$$\varphi\frac{d\varphi}{dx}\,dx=\varphi\,d\varphi,$$

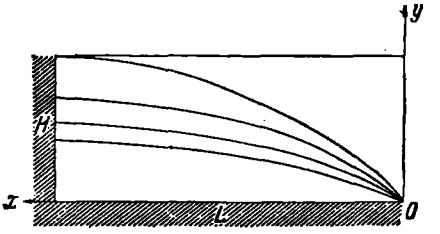
получим уравнение

$$2\varphi\frac{d\varphi}{dx}\,d\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda\varphi^2\,d\varphi=0,$$

которое интегрируется в форме

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{\lambda}{3}\varphi^3=C_2=\text{const}. \tag{7.10}$$

Предположим, что область, занятая жидкостью, есть прямоугольник (фиг. 89), основание которого равно L, а высота равна H. Возьмём начало координат в том конце, где происходит истечение. На другом конце ($x=L$) пусть никакого истечения не происходит. Следовательно, граничное условие на закрытом конце будет



Фиг. 89.

$$\frac{d\varphi}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x=L. \tag{7.11}$$

Напор на открытом конце, где происходит истечение из пласта, примем равным нулю. Это даёт нам второе граничное условие

$$\varphi=0 \quad \text{при} \quad x=0. \tag{7.12}$$

Из условия (7.11) следует, что $\varphi(x)$ будет иметь своё наибольшее значение f при $x=L$. Поэтому из (7.10) и (7.11) получаем

$$\frac{1}{3}\lambda f^3=C_2. \tag{7.13}$$

Внося (7.13) в (7.10) и интегрируя уравнение (7.10), найдём

$$x+C_3=\int\frac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\frac{\lambda}{3}(f^3-\varphi^3)}},$$

или, вследствие условия (7.12),

$$x\sqrt{\frac{\lambda}{3}}=\int_0^{\varphi}\frac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{f^3-\varphi^3}}. \tag{7.14}$$

Если введём новое переменное

$$z = \frac{\varphi}{f}, \tag{7.15}$$

то при $x = L$ получим $z = 1$. Из (7.14) находим

$$x \sqrt{\frac{\lambda}{3f}} = \int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^3}}. \tag{7.16}$$

Обозначив

$$C_4^2 = \frac{\lambda L^2}{3f}, \tag{7.17}$$

получим

$$C_4 \frac{x}{L} = \int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^3}}. \tag{7.18}$$

Положив в последнем равенстве

$$x = L,\ z = 1,$$

мы получим формулу Буссинеска

$$C_4 = \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^3}} \tag{7.19}$$

Вычисление даёт

$$C_4 = 0{,}86236. \tag{7.20}$$

Определяя из равенства (7.16) z, получим

$$z = z(x). \tag{7.21}$$

Подставляя (7.21) в (7.15), найдём

$$\varphi(x) = fz(x). \tag{7.22}$$

Из (7.1), (7.8) и (7.22) мы получаем окончательно

$$h = \frac{fz(x)}{1 + \frac{\lambda t}{A}}. \tag{7.23}$$

Но этот интеграл уравнения (2.3) есть частный интеграл, а не

общий интеграл. Он отвечает специальному типу свободной поверхности жидкости в начальный момент времени; именно

$$h = fz(x). \tag{7.24}$$

Но Буссинеск показал, что этот случай движения обладает устойчивым характером, так как если бы начальная форма свободной поверхности мало уклонялась от (7.24), то движение всё-таки было бы таким, которое отвечает начальному условию (7.24). Поэтому Буссинеск назвал это движение *упорядоченным*. Он полагал, что это движение играет роль при неустановившемся движении грунтовых вод.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Ботсет (Botset) 111
Буссинеск (Boussinesq) 145, 147, 230, 232, 236, 240

Вайкоф (Wyckoff) 111
Вилькер Д. С. 134, 137, 170, 195, 199, 202

Газен А. 51, 57

Дарси (Darcy) 55
Донат (Donat) 58
Дюпюи (Dupuit J.) 229

Жуковский Н. Е. 77, 89

Замарин Е. А. 54, 58, 59, 66
Зауэрбрей И. И. 41, 52, 58
Зельгейм (Seelheim) 51, 56

Кинг Ф. (King F.) 50
Клауд В. (Cloud W.) 115
Козени (Kozeny) 17, 36, 53, 57, 72
Кребер (Kröber) 66
Кресник П. 67

Лапук Б. Б. 193, 201
Лейбензон Л. С. 79, 88, 101, 108, 210, 224

Мирес (Meres) 104
Москальков И. П. 170, 184, 189, 199
Мускат (Muskat) 104, 210, 215

Рейд Л. (Reid L.) 124
Рейнольдс О. (Reynolds O.) 14

Слихтер (Slichter) 17, 18, 23, 25, 31, 57, 69
Смрекер (Smrecer) 17, 66

Тарасова Т. А. 119, 123
Терцаги (Terzaghi) 38, 68

Форхгеймер (Forchheimer) 67, 69

Хентингтон Р. (Huntington R.) 124
Христианович С. А. 92

Шривер В. (Schriever W.) 68

Щелкачёв В. Н. 85, 86, 210, 215

Юрен Л. (Uren L.) 122, 126

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Анализ механический естественного грунта 49
Аналогия с движением газа 230

Вода краевая 206
Вытеснение газа водой 220
— мёртвой нефти водой 207, 210, 212, 215, 218.

Гипотеза Жуковского о компонентах фиктивных сил сопротивления 77
— о совместном движении жидкой и газовой фаз 94, 121, 124, 126
Грунт естественный корригированный 50
— идеальный 11
— фиктивный 11, 50

Движение несжимаемой жидкости в пористой среде под действием силы тяжести 225
— неустановившееся газа двухмерное 161
— — — через скважину с круговым контуром 162
— упорядоченное 240
— установившееся в неглубокой воде 233
— — радиальное в неглубокой воде 234
Дебит весовой скважины 161, 165
— пласта 155
Диаметр эффективный 50
— —, способы его определения 50, 51, 52, 54
Добыча суммарная 130

Единица проницаемости Дарси 60

Жидкость газированная 99
— живая 94
— мёртвая 30, 94

Закон Генри 94
— опытный Москалькова о зависимости времени истощения пласта от эффективного диаметра частиц песка 194
— прямой линии Вилькера 202
— распределения давления при одномерном установившемся движении газа в неизменяемой пористой среде 134
— Рейнольдса при движении жидкости по призматической трубе произвольного поперечного сечения 14.
— фильтрации Смрекера 17

Интеграл уравнения неустановившегося двухмерного движения газа вблизи скважины малого диаметра 168
Интервал теоретического просвета 23
— теоретической пористости 22

Компоненты скорости ламинарной фильтрации 76
— — турбулентной фильтрации 88, 90
Контур питания 206
Коэффициент однородности 52
— фильтрации Дарси 56
— —, экспериментальное определение по величине проницаемости пористой среды 59
Кривая весового участия фракций грунта 53
— истощения 159
— Козени 54

Кривая суммарной добычи пласта 129, 130, 160

Линеаризация уравнения неустановившегося ламинарного движения газа в неизменяемой пористой среде 148
Линза круглая 212

Метод Козени определения скорости турбулентной фильтрации 72
— размерностей 44, 73
— Слихтера определения скорости турбулентной фильтрации 70
Модель фиктивного грунта в методе Слихтера 18

Напор 80
Насыщенность 95, 98, 108, 111, 131
Нефть мёртвая 206
— живая 207

Область застойной жидкости 63, 65
Опыты ГИНИ над неустановившимся движением газа в песках и глине 170, 184, 189
— — — — трёхмерным движением газа в песке 198
— — — установившимся движением воздуха через песок 134
— Клауда над движением газированной жидкости в пористой среде 115
— МГУ над взаимодействием двух скважин в одномерном газовом пласте 202
— — — неустановившимся движением газа через песок 195
— — — установившимся движением воздуха через песок 137
— Рейда и Хентингтона над движением смеси нефти и газа в песке 124
— Юрена над неустановившимся движением газированной нефти 127
Опыты Юрена над установившимся движением смеси нефти и газа в песке 122

Поверхность депрессионная 221
— напора 80
Пористость 12, 17, 232
— идеального грунта 12
— истинная 62, 65
— фиктивного грунта 18
— эффективная 62
Проницаемость 15, 17, 56, 61, 111
— теоретическая 34, 37, 40
—, экспериментальное определение 61
Просвет 23
— истинный 62
— эффективный 62
Процесс изотермический 83
— политропический 82

Радиус действия скважины 235
Режим смешанный газово-гидравлический 207
— упорядоченный Буссинеска 236
— чистый гидравлический 206
Решения уравнения неустановившегося ламинарного движения газа в неизменяемой пористой среде 143, 145, 147, 150, 152.

Силы сопротивления фиктивные 76, 89
Скорость ламинарной фильтрации 56, 63, 66
— турбулентной фильтрации 88
— фильтрации в идеальном грунте 12, 15
— — в фиктивном грунте 33
Соотношение Эльдифрави между теоретической проницаемостью и пористостью 34
Среда пористая недеформируемая 75

Теорема Слихтера о средней скорости движения по поровому каналу 35

Теория фильтрации в фиктивном грунте, 41, 44
Течение газа одномерное 133

Уклон гидравлический 55
Уравнение Буссинеска для неглубокой воды 228
— Дюпюи 229, 239
— ламинарной фильтрации газа в неизменяемой пористой среде 81, 82, 132, 142
— — — газированной жидкости в неизменяемой пористой среде 100, 103, 108, 110
— — — общее в неизменяемой пористой среде 78, 79
— — — тяжёлой жидкости в неизменяемой пористой среде 79, 84
— неразрывности при движении сжимаемой жидкости в пористой среде 74, 85, 86
— неустановившегося двухмерного движения газа 161
— — ламинарного движения газа в неизменяемой пористой среде 142, 143
— политропы 82, 143
— турбулентной фильтрации векторное 88, 90
— — — газа в пористой среде 92
— — — малосжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде 93
— — — несжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде 92
— — — сжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде 90
— — — тяжёлой газированной жидкости в неизменяемой пористой среде 101
— упругого режима фильтрации 84
Уравнение установившегося ламинарного движения газа в неизменяемой пористой среде 132
— характеристическое для газа, движущегося вместе с жидкостью в пористой среде 98
Уравнения Буссинеска для глубокой воды 231, 233

Фаза газовая 94,95
— жидкая 94, 95
Фильтрация 11
— в идеальном грунте 11
— ламинарная 15
— — совместная жидкости и газа в неизменяемой пористой среде 99
— турбулентная 69
— через глину 68
— через фиктивный грунт 31, 35, 38
— чисто квадратичная 17
Формула Дарси для скорости ламинарной фильтрации 55, 65
— Дюпюи для дебита скважины 236
— общая теории фильтрации 48, 65
— Слихтера для пористости фиктивного грунта 22
— — для скорости фильтрации в фиктивном грунте 33
— Терцаги для скорости фильтрации в фиктивном грунте 40
— — для коэффициента фильтрации 68
— эмпирическая Шривера для скорости фильтрации 68
Формулы для скорости фильтрации 66, 67
— расчётные для коэффициента фильтрации Дарси 56

Число газовое 131
— фильтрации 45, 47
— — производное 48, 65